

АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ ЭПИЗООТИИ ПО ОСНОВНЫМ КРИТЕРИЯМ

Александр Михайлович Слиденко, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и математических методов в экономике
Борис Витальевич Ромашов, доктор биологических наук, профессор, зав. кафедрой паразитологии и эпизоотологии

Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I

Предлагается алгоритм идентификации вероятностной модели, являющейся системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Алгоритм служит для оценки параметров модели и ее структуры по одному или нескольким критериям. Осуществляется минимизация целевой функции, представленной в виде свертки двух критериев. Для поиска минимума целевой функции применяется градиентный метод в разностной форме (производные от целевой функции аппроксимированы разностными отношениями). Решение системы дифференциальных уравнений находится численным методом (один из вариантов метода Эйлера). Проведена идентификация математической модели развития заболевания (лейкоза) в группе изолированных животных по данным наблюдений. Модель построена на основе теории марковских случайных процессов. В условиях влияния большого числа независимых и неучтенных факторов корректные выводы можно делать только с некоторой вероятностью. Модель представлена в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вероятностей состояний. Приняты основные возможные состояния: сенсibilitätность, резистентность, инфицированность и гематологичность. Оценками вероятностей состояний являются относительные частоты состояний, полученные по данным наблюдений. Система дифференциальных уравнений является линейной и допускает аналитическое решение при некоторых дополнительных условиях. Это решение используется для тестирования численного метода и алгоритма идентификации. В системе Mathcad разработана программа, состоящая из специализированных функциональных блоков, которые тестируются автономно. Рассмотрены несколько вариантов целевых функций, в которых сравниваются опытные и модельные значения переменных. С помощью весовых коэффициентов определяется предпочтение относительно переменных. Получены оптимальные оценки параметров модели, а также рекомендации по уточнению ее структуры. Сравнение целевых функций с помощью показателя близости на оптимальном решении показало, что наилучшим является вариант целевой функции, в котором сравнение осуществляется по вероятностям состояний «сенсibilitätность или резистентность» и «инфицированность или гематологичность».

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: вероятностная модель, идентификация, эпизоотия, градиентный метод, свертка критериев.

The authors propose an algorithm for identification of a stochastic model, which is a system of ordinary differential equations. Executed algorithm is used to estimate the model parameters and its structure according to one or more criteria. This is done through minimization of the objective function represented as a convolution of two criteria. To find the minimum of the objective function the gradient method in the difference form is applied (derivatives of the objective function approximated by difference ratios). The system of differential equations is solved using the numerical method (a variant of Euler's method). The authors performed an identification of a mathematical model of the development of disease (leukemia) in a group of isolated animals according to the observational data. The model is based on the theory of Markov random processes. Under the influence of a large number of independent and unaccounted factors valid conclusions can be made only with a certain probability. The model is represented in the form of a system of ordinary differential equations with relation to state probabilities. The main possible states included sensitisation, resistance, infection and hematologicity. The estimates of state probabilities are relative frequencies of states obtained from observational data. The system of differential equations is linear and can be solved analytically under certain additional conditions. This solution is used to test the numerical method and algorithm of identification. In the Mathcad system the authors have developed a program consisting of special functional units, which are tested independently. The authors have considered several options for objective functions comparing the experimental and theoretical values of variables. With the help of weighting coefficients the preference in relation to variables is determined. The authors have obtained

optimal estimations of model parameters, as well as recommendations for the refinement of its structure. Comparison of objective functions with the help of proximity index on the optimal solution showed that the best option is the objective function, in which the comparison is made by state probabilities of «sensitisation vs resistance» and «infection vs hematologicity».

KEY WORDS: stochastic model, identification, epizootic disease, gradient method, convolution of criteria.

В ведение

Процесс идентификации математической модели в настоящее время является одним из главных этапов математического моделирования [1-3]. Этому способствует наличие эффективных вычислительных средств и систем. На первый план выходит разработка методов многокритериальной оптимизации.

Вопросам изучения процессов распространения инфекционных заболеваний посвящены работы ряда авторов [3-5]. Эффективные вычислительные средства и системы делают более доступным для применения в качестве инструмента исследования метод математического моделирования.

В данной работе рассматривается модель распространения инфекционного заболевания лейкоза в условиях изолированной группы животных. Для построения модели в отличие от предыдущих публикаций [4] используется вероятностный подход на основе случайных процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями. Наличие наблюдений за длительный период позволяет сформулировать некоторые задачи идентификации математической модели и найти их приближенные решения. Идентификация осуществляется по двум критериям, представленным в виде свертки.

Следует отметить, что информация об условиях наблюдений, в силу длительного периода (10 лет) и различных локальных целей исследований, не является полной. По этой причине наряду с параметрами целесообразно также оценивать структуру математической модели (системы дифференциальных уравнений).

Математическая модель

А.М. Слиденко с соавт. рассматривалась математическая модель развития эпизоотии (лейкоза) в виде системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Отметим характерные особенности развития заболевания, которые определяют структуру модели без учета запаздывания процессов во времени. К таким особенностям можно отнести наличие незначительного инкубационного периода, а также быструю передачу инфекции после заражения вирусом.

Рассмотрим систему «биологический объект» (особь, животное). Предполагаем, что система может находиться в следующих состояниях:

S – *сенсильность (восприимчивость к заболеванию);*

Y – *инфицированность (обладатель инфекции в начальной стадии);*

G – *гематологическая стадия заболевания;*

R – *резистентность (устойчивость к заболеванию).*

Характер и особенности заболевания, а также некоторые внешние субъективные факторы (замена больных животных здоровыми) определяют предполагаемые возможности переходов системы из одного состояния в другое. Следует отметить, что некоторые переходы предполагаются возможными и эта возможность должна подтверждаться на основе опытных данных в процессе идентификации. По этой причине предложенная модель имеет предварительную, начальную структуру. Кроме того, данные наблюдений, полученные за длительный период, не могут быть исчерпывающими, так как нет точной информации относительно всех мероприятий, которые проводились в этот период с группой животных.

Граф возможных состояний системы, возможные переходы и интенсивности потоков событий, которые переводят систему из одного состояния в другое, представлены на рисунке 1.

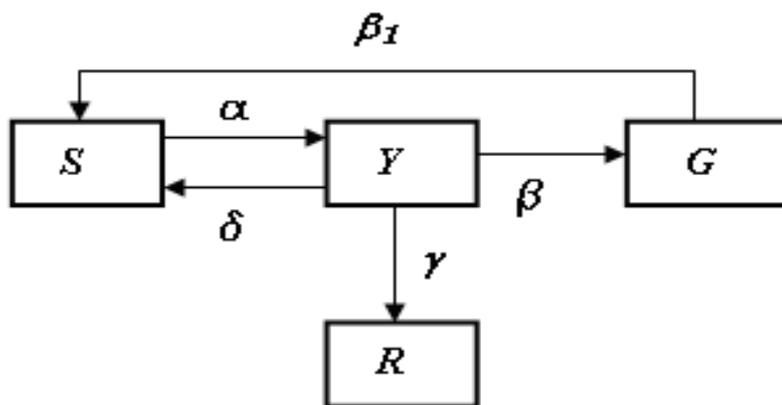


Рис. 1. Граф состояний системы

Пусть $X(t)$ – состояние системы в момент времени t , введем обозначения вероятностей соответствующих состояний:

$$s(t) = P(X(t) = S);$$

$$y(t) = P(X(t) = Y);$$

$$g(t) = P(X(t) = G);$$

$$r(t) = P(X(t) = R).$$

Рассматривая случайный процесс как марковский (потоки событий простейшие), запишем уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha \cdot s(t) - \beta \cdot y(t) - \gamma \cdot y(t) - \delta \cdot y(t); \quad (1)$$

$$\frac{ds}{dt} = -\alpha \cdot s(t) + \delta \cdot y(t) + \beta_1 \cdot g(t); \quad (2)$$

$$\frac{dg}{dt} = \beta \cdot y(t) - \beta_1 \cdot g(t); \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma \cdot y(t). \quad (4)$$

Кроме того,

$$y(t) + s(t) + g(t) + r(t) = 1. \quad (5)$$

Задавая начальные условия

$$y(0) = y_0, \quad s(0) = s_0, \quad g(0) = g_0, \quad r(0) = r_0, \quad (6)$$

приходим к начальной задаче.

В системе уравнений (1) – (4) параметры α и β характеризуют интенсивность процесса развития эпизоотии. Коэффициенты δ , β_1 и γ служат для уточнения структуры модели и могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Например, β_1 определяется внешними условиями и характеризует интенсивность замены больных особей сенсильными. Значения этих коэффициентов оцениваются с помощью алгоритма идентификации.

Анализ данных наблюдений

Наблюдения проводились над молочным поголовьем опытного хозяйства Воронежского государственного аграрного университета в течение длительного промежутка времени (около 10 лет). На рисунке 2 приведены полученные в ходе проведения наблюдений значения количества больных и здоровых животных.

Следует отметить, что в процессе наблюдений больные животные заменялись здоровыми животными, причем точные данные о таких заменах отсутствуют. Таким образом, в расчетах мы используем данные наблюдений, которые содержат неполную информацию.

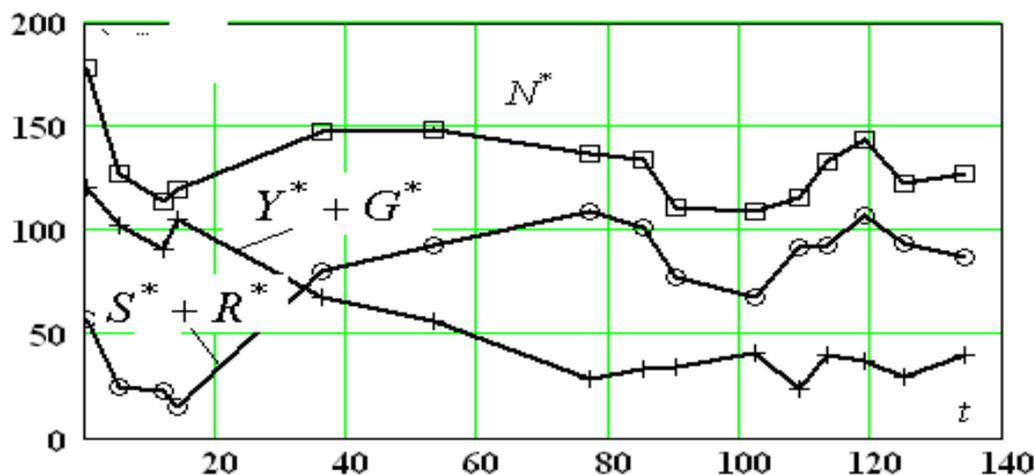


Рис. 2. Данные наблюдений: $Y^* + G^*$ – количество больных животных;
 $S^* + R^*$ – количество здоровых животных; t – время (в месяцах);
 N^* – общее количество животных

Данные наблюдений целесообразно представить в относительных переменных

$$y^*(t) = \frac{Y^*(t)}{N^*(t)}, \quad s^*(t) = \frac{S^*(t)}{N^*(t)}, \quad g^*(t) = \frac{G^*(t)}{N^*(t)}, \quad r^*(t) = \frac{R^*(t)}{N^*(t)}. \quad (7)$$

Справедливо равенство

$$N^*(t) = Y^*(t) + S^*(t) + G^*(t) + R^*(t). \quad (8)$$

Отметим, что данные наблюдений не содержат информацию о количествах особей в каждой группе. Относительные частоты следует считать статистическими оценками вероятностей состояний системы.

На рисунке 3 представлены изменения по времени относительных частот состояний системы.

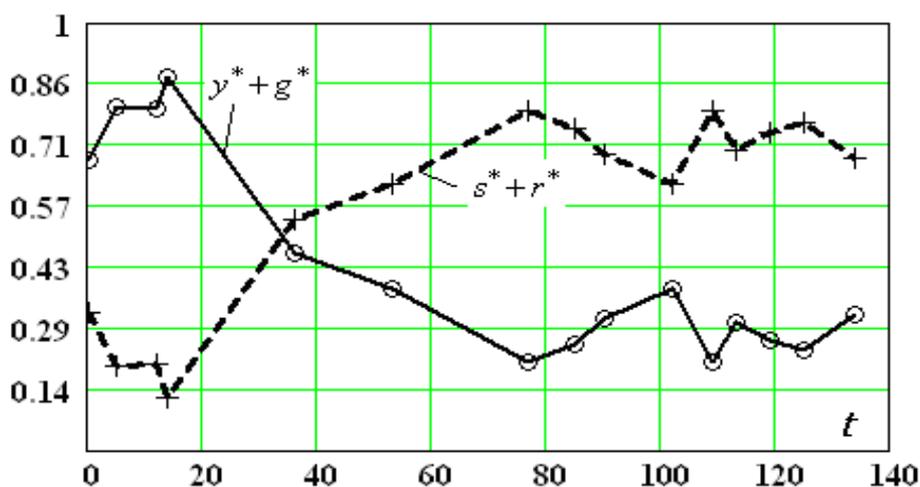


Рис. 3. Относительные частоты

Приведенные выше данные являются основными для определения критериев идентификации вероятностной модели.

Алгоритм идентификации

Будем рассматривать $a = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \beta_1\}$ как точку в пятимерном пространстве, координатами которой являются параметры модели. Пусть $y(t_k, a)$, $s(t_k, a)$, $g(t_k, a)$ и $r(t_k, a)$ – решение начальной задачи (1) – (6); y_k^* , g_k^* , s_k^* и r_k^* – опытные значения; $k = 1, 2, \dots, m$, где m – число измерений; ω_1 и ω_2 – весовые параметры.

Введем функции:

$$U_1(a) = \sum_{k=1}^m \omega_1 (y(t_k, a) - y_k^*)^2 + \sum_{k=1}^m \omega_2 (s(t_k, a) - s_k^*)^2, \quad (9)$$

$$U_2(a) = \sum_{k=1}^m \omega_1 (y(t_k, a) + g(t_k, a) - y_k - g_k^*)^2 + \sum_{k=1}^m \omega_2 (s(t_k, a) + r(t_k, a) - s_k^* - r_k^*)^2. \quad (10)$$

Функции (9) и (10) характеризуют близость опытных и модельных значений переменных y , g , s и r . Точка a является аргументом этих функций, так как $y(t_k, a)$, $g(t_k, a)$, $r(t_k, a)$ и $s(t_k, a)$ зависят от a . Параметры ω_1 и ω_2 определяют степень предпочтения сближения по одной из переменных. Например, при $\omega_2 = 0$ сближение осуществляется только по $y(t_k, a)$, при $\omega_1 = 0$ – только по $s(t_k, a)$ для функции (9).

В общей постановке задача формулируется следующим образом: найти значение вектора a , которое минимизирует функцию $U_1(a)$ (или $U_2(a)$), при условии

$$a = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \beta_1\} \geq 0. \quad (11)$$

Отрицательные значения координат можно интерпретировать как погрешность построения структуры математической модели (дифференциальных уравнений).

Пусть

$$\nabla_{\tau} U(a) = \left\{ \frac{\Delta_{\alpha} U}{\tau}, \frac{\Delta_{\beta} U}{\tau}, \frac{\Delta_{\gamma} U}{\tau}, \frac{\Delta_{\delta} U}{\tau}, \frac{\Delta_{\beta_1} U}{\tau} \right\} - \text{разностный градиент функции } U(a).$$

Здесь частные производные первого порядка аппроксимированы разностными отношениями с первым порядком относительно τ , то есть

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} \approx \frac{U(\alpha + \tau, \beta, \dots, \beta_1) - U(\alpha, \beta, \dots, \beta_1)}{\tau} = \frac{\Delta_{\alpha} U}{\tau},$$

.....

$$\frac{\partial U}{\partial \beta_1} \approx \frac{U(\alpha, \beta, \dots, \beta_1 + \tau) - U(\alpha, \beta, \dots, \beta_1)}{\tau} = \frac{\Delta_{\beta_1} U}{\tau}.$$

Обозначим через $a^{(p+1)}$ и $a^{(p)}$ приближения a в итерационном процессе

$$\alpha^{(p+1)} = \alpha^{(p)} - h \cdot \nabla_{\tau} U(\alpha^{(p)}), \quad p = 1, 2, \dots, M. \quad (12)$$

Здесь h – параметр итерационного процесса, который выбирается определенным образом и определяет экономичность метода [6].

Блок-схема компьютерной программы в этом случае представлена на рисунке 4.

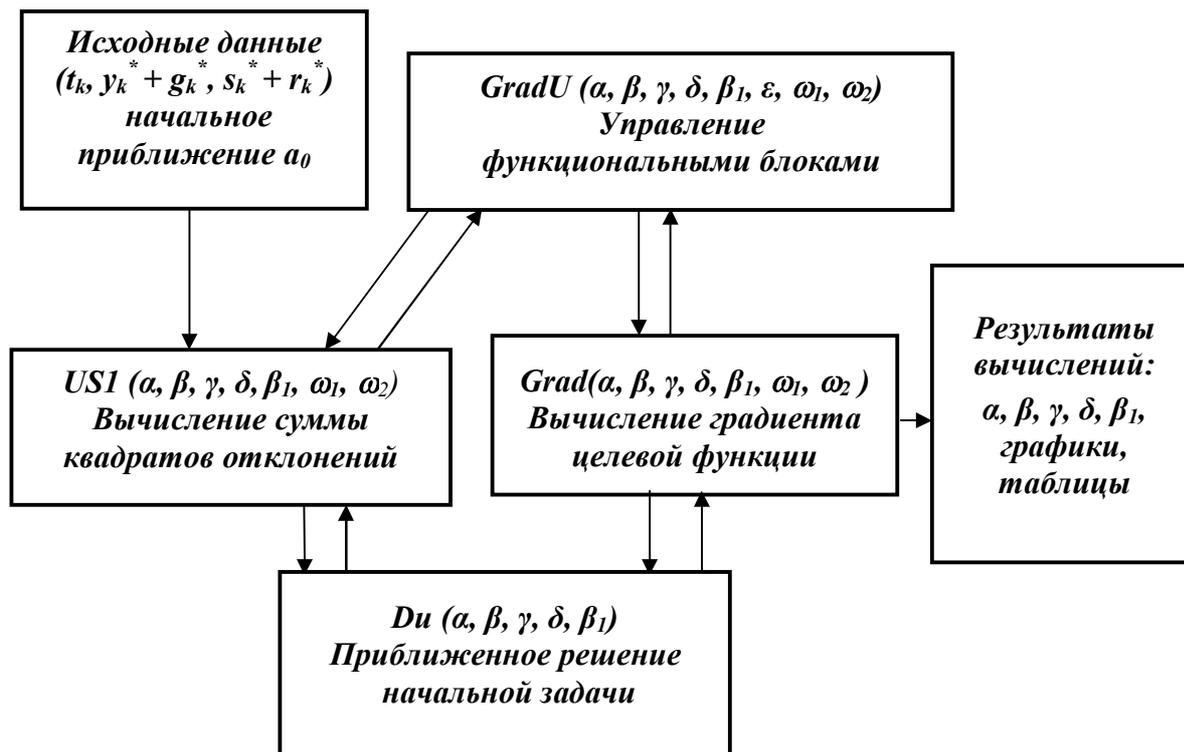


Рис. 4. Блок-схема алгоритма идентификации

Следует отметить некоторые возможности программы (программа разработана в системе Mathcad).

1. Реализация итерационного процесса по отдельным критериям.
2. Реализация итерационного процесса по обоим критериям с различными весами.
3. Реализация процесса покоординатного спуска.

Аналитическое решение тестовой начальной задачи

В частном случае, когда $\beta_1 = 0$, точное решение задачи (1) - (6) может использоваться для тестирования предлагаемого алгоритма. Рассмотрим коротко получение этого решения. Система уравнений принимает вид:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha \cdot s(t) - y(t)(\beta + \gamma + \delta), \tag{13}$$

$$\frac{ds}{dt} = -\alpha \cdot s(t) + \delta \cdot y(t), \tag{14}$$

$$\frac{dg}{dt} = \beta \cdot y(t), \tag{15}$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma \cdot y(t). \tag{16}$$

Уравнения (13) и (14) можно свести к уравнению второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \frac{dy}{dt} + \alpha(\beta + \gamma)y = 0.$$

Корни характеристического уравнения равны

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2}{4} - \alpha(\beta + \gamma)}.$$

При положительных значениях коэффициентов справедливо неравенство

$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2}{4} - \alpha(\beta + \gamma) > 0.$$

В этом случае общее решения имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Вторая функция получается из уравнения

$$s(t) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dy}{dt} + (\beta + \gamma + \delta)y(t) \right)$$

и имеет вид

$$s(t) = C_1 \frac{\lambda_1 + \beta + \gamma + \delta}{\alpha} e^{\lambda_1 t} + C_2 \frac{\lambda_2 + \beta + \gamma + \delta}{\alpha} e^{\lambda_2 t}.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из системы уравнений

$$C_1 + C_2 = y_0,$$

$$C_1 \frac{\lambda_1 + \beta + \gamma + \delta}{\alpha} + C_2 \frac{\lambda_2 + \beta + \gamma + \delta}{\alpha} = s_0.$$

В результате получаем

$$C_1 = \frac{\alpha S_0 - y_0(\lambda_2 + \beta + \gamma + \delta)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2 = \frac{\alpha S_0 - y_0(\lambda_1 + \beta + \gamma + \delta)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (17)$$

Интегрированием находим

$$g(t) = g_0 + \beta \frac{C_1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - 1) + \beta \frac{C_2}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 t} - 1), \quad (18)$$

$$r(t) = r_0 + \gamma \frac{C_1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - 1) + \gamma \frac{C_2}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 t} - 1). \quad (19)$$

Аналогично находим остальные функции.

Графики точного решения начальной задачи (при $\beta_1 = 0$) и приближенного (один из вариантов метода Эйлера) приведены на рисунке 5.

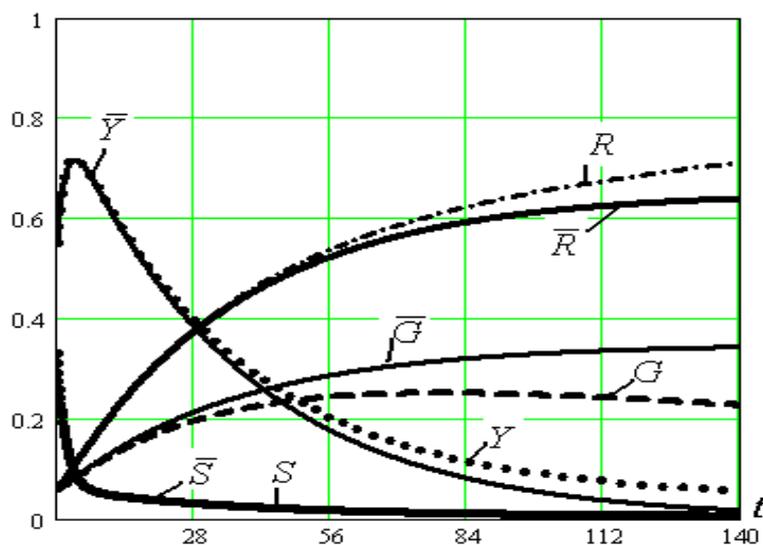


Рис. 5. Точное решение начальной задачи при условии $\beta_1 = 0$ ($\bar{Y}, \bar{G}, \bar{S}, \bar{R}$) и приближенное решение при $\beta_1 = 0,005$ (Y, G, S, R)

Результаты численных экспериментов

Далее осуществлялась процедура градиентного спуска. Сравнение результатов двух основных (существенно различных) вариантов идентификации модели позволило выбрать лучший вариант целевой функции.

1. Применение целевой функции (9) при значениях весовых коэффициентов $\omega_1 = \omega_2 = 8 \cdot 10^5$ показало существенное расхождение опытных и расчетных значений. Кроме того, получены отрицательные значения $r(t)$ при оптимальных значениях параметров, что свидетельствует о выходе из области допустимых значений.

2. Результаты применения целевой функции (10) при $\omega_1 = \omega_2 = 8 \cdot 10^5$ представлены на рисунках 6 и 7. Можно отметить достаточно хорошую сходимость расчетных и опытных данных в начальный период заболевания. В более поздний период времени сохраняется только общая тенденция изменения расчетных и опытных переменных.

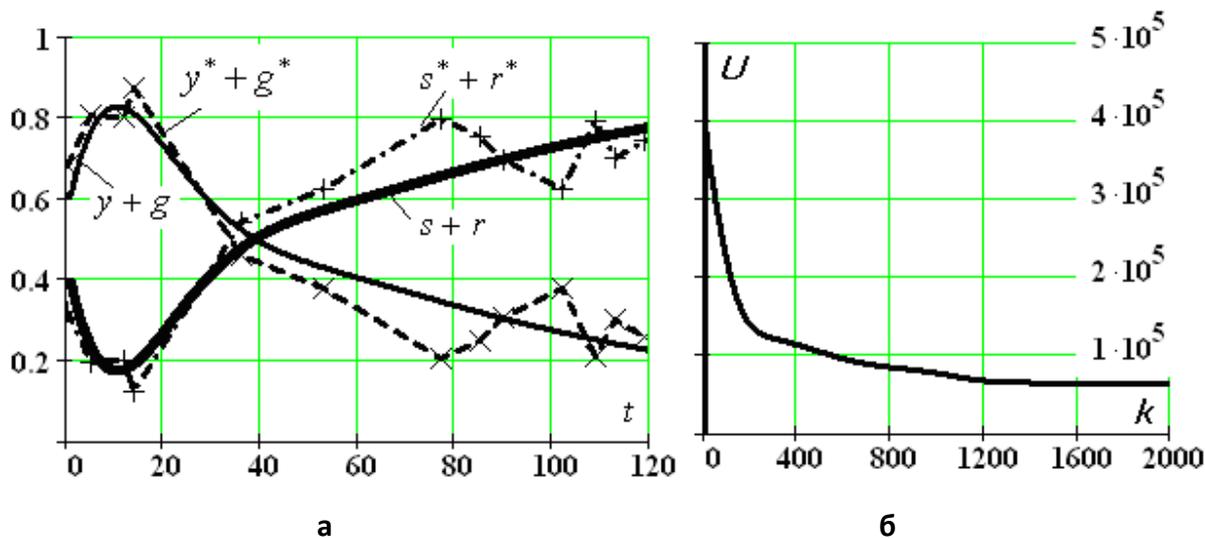


Рис. 6. Результаты применения целевой функции (10) при $\omega_1 = \omega_2 = 8 \cdot 10^5$:
 а) оптимальное решение задачи и опытные кривые;
 б) целевая функция в итерационном процессе

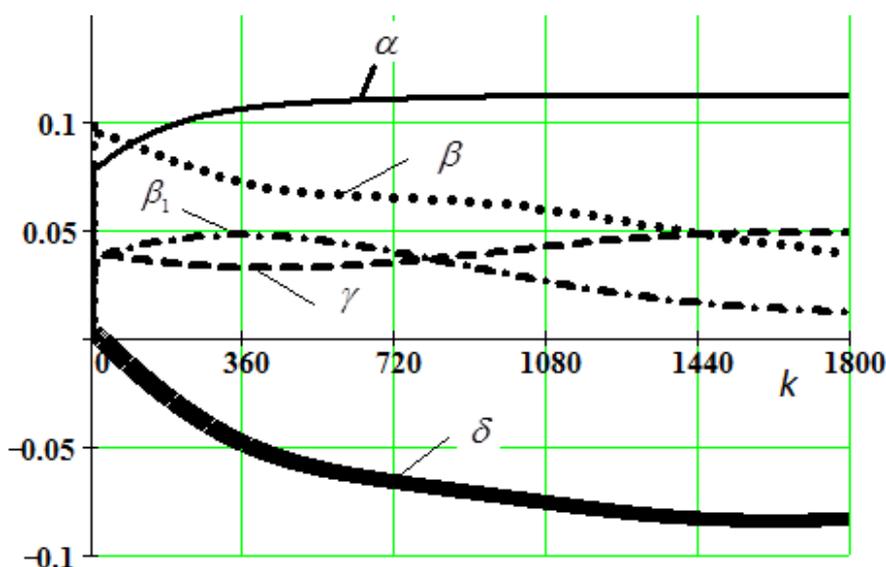


Рис. 7. Параметры модели в итерационном процессе

С учетом условия неотрицательности переменных получены оптимальные значения оценок параметров модели при $k = 450$:

$$\alpha = 0,108, \quad \beta = 0,069, \quad \gamma = 0,0323, \quad \beta_1 = 0,0466, \quad \delta = -0,055.$$

Значение $\delta < 0$ свидетельствует о маловероятном переходе $Y \rightarrow S$. Можно предположить, что преобладает переход $Y \rightarrow G \rightarrow S$. Эти особенности требуют специального изучения, и выводы носят предварительный характер в силу использования неполной информации относительно статистических данных.

Сравнение результатов вычислений приводит к выводу о том, что наилучшее приближение получено при использовании целевой функции (10). В этой функции не выделялись отдельно инфицированные и больные особи. Следует отметить, что данные наблюдений не содержат полную информацию, поэтому деление на состояния y и g можно считать достаточно условным. Для более точного вывода следует уточнить данные наблюдений, что иногда практически реализовать достаточно сложно.

Главная цель данной работы – проверка алгоритма идентификации по двум основным параметрам: $y + g$ и $s + r$.

Предложенная модель является линейной и допускает точное аналитическое решение. Это решение в некоторых частых случаях находится просто и может быть использовано для тестирования алгоритма идентификации.

Заключение

1. Предложена математическая модель динамики заболевания (лейкоза) на основе теории случайных процессов. В условиях влияния большого числа независимых и неучтенных факторов корректные выводы можно делать только с определенной долей уверенности, то есть с некоторой вероятностью.

2. Разработан алгоритм идентификации модели по данным наблюдений. Минимизация целевой функции осуществляется по двум критериям, сама функция предлагается в виде свертки двух критериев.

3. Разработана программа в системе Mathcad, состоящая из специализированных функциональных блоков. Предложена задача для тестирования программы, которая допускает аналитическое решение.

4. Проведено уточнение структуры дифференциальных уравнений по данным наблюдений.

5. Сравнение целевых функций с помощью показателя близости на оптимальном решении показало, что наилучшим является вариант целевой функции, в котором сравнение осуществляется по вероятностям состояний «сенсibilidade или резистентность» и «инфицированность или гематологичность».

Список литературы

1. Токарев В.В. Методы оптимальных решений. Многокритериальность. Динамика. Неопределенность : учеб. пособие / В.В. Токарев. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 420 с.
2. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad : учеб. пособие / В.А. Охорзин. – Санкт-Петербург : Изд-во «Лань», 2008. – 352 с.
3. Романюха А.А. Математические модели в иммунологии и эпидемиологии инфекционных заболеваний / А.А. Романюха. – Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 293 с.
4. Слиденко А.М. Об идентификации математической модели развития эпизоотии / А.М. Слиденко, Т.Е. Соловьева, М.А. Кромина // Электронный журнал «Исследовано в России». – 2005. – № 166. – С. 1735-1743 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2005/166.pdf> (дата обращения: 21.03.2015).
5. Слиденко А.М. О применении градиентных методов в задачах идентификации / А.М. Слиденко // Информатика: проблемы, методология, технологии : материалы XI Международной науч.-метод. конф. – Воронеж, 2011. – С. 306-310.
6. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики : учеб. пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – Санкт-Петербург : Изд-во «Лань», 2011. – 672 с.