УДК 681.31(075.8)

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ САПР КОНСТРУКЦИЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Дмитрий Николаевич Афоничев, доктор технических наук, профессор,
зав. кафедрой электротехники и автоматики

Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I

Объект исследования – процесс нагружения конструкций на упругом основании внешней подвижной нагрузкой, предметы исследования – закономерности изменения реакции основания и изгибающих моментов в сечениях конструкций на упругом основании. Цель исследования – разработать математическое обеспечение системы автоматизации проектных работ (САПР). При проведении исследования использованы методы: расчёта конструкций на упругом основании профессора Б.Н. Жемочкина, расчёта статически неопределимых систем, решения систем линейных уравнений. Получены аналитические зависимости, определяющие свободные члены и коэффициенты системы канонических уравнений при любом распределении внешних подвижных нагрузок на конструкции. При этом учитывается собственная масса конструкции. Данные зависимости позволяют на ЭВМ выполнить расчёт и сформировать системы линейных уравнений для определения реакций основания. Количество уравнений можно задать достаточно большое, что обеспечивает высокую точность расчёта реакции основания и соответственно изгибающих моментов в конструкции на упругом основании. При ручном расчёте максимальное количество уравнений может быть до 10, что требует трудоёмкого решения и при относительно грубых результатах. Для реализации вычислительных процедур на ЭВМ разработаны алгоритмы и программа на языке C++, использование которых позволяет повысить производительность проектных работ, выполнить расчёт конструкций при различных вариантах приложения внешних нагрузок. Разработанное математическое обеспечение может быть использовано в САПР при проектировании сборных покрытий автомобильных дорог, железнодорожных шпал, фундаментных плит, оно позволяет проводить имитационное моделирование процессов нагружения дорожных плит внешней подвижной нагрузкой при переменных координатах внешних нагрузок и изменении их количества.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: система автоматизации проектных работ, математическое обеспечение, система уравнений, изгибающий момент, сила, поперечное сечение, реакция основания.

The object of this study is the process of loading of structures on elastic foundation with external mobile load. The subject of research included patterns of changes in base response and bending moments in the cross-sections of structures on elastic foundation. The objective of research was to develop math support for the system of automated design (CAD). The study was performed using the following techniques: calculation of structures on elastic foundation by Professor B.N. Zhemochkin, calculation of statically indeterminate systems and solving systems of linear equations. The author has obtained analytical dependences defining the free terms and coefficients of the system of canonical equations at any distribution of external moving loads on the structure. This takes into account the weight of the structure itself. These dependencies allow performing computer calculations and developing systems of linear equations to determine the response of the base. The number of equations can large enough to provide a high accuracy of calculation of base response and respective bending moments in the structure on elastic foundation. In manual calculation the maximum number of equations can be up to 10, which requires time-consuming solution with relatively rough results. To implement the computational procedures on a PC the author has developed algorithms and a program written in C++, the use of which allows increasing the productivity of work and performing calculations of structures at different variants of applying external loads. The developed software can be used in CAD for designing modular coverings of roads, railway sleepers and base plates; it allows simulating the processes of loading the paving slabs with moving loads at varying coordinates of external loads and changes in their number.
KEY WORDS: system of automated design, math support, system of equations, bending moment, force, cross section, base response.

Введение

В настоящее время в инженерной практике широко используются и развиваются системы автоматизации проектных работ (САПР), которые позволяют избавить специалистов от рутинной работы по выполнению вычислений и подготовке проектной документации. САПР позволяют эффективно реализовывать многовариантное проектирование и по комплексу критериев отбирать лучшее проектное решение. Одной из важнейших подсистем САПР является математическое обеспечение, которое необходимо не только для реализации вычислительных процедур, но и для модернизации самих САПР.

При проектировании конструкций на упругом основании, таких как дорожные и фундаментные плиты, железнодорожные шпалы, требуется выполнение большого количества сложных математических преобразований и вычислений, связанных с расчётом статически неопределимых систем.

Разработанное и представленное в данной статье математическое обеспечение САПР сборных дорожных покрытий может быть применено также для проектирования фундаментных плит и железнодорожных шпал.

Объект исследования – процесс нагружения конструкций на упругом основании внешней подвижной нагрузкой, предметы исследования – закономерности изменения реакции основания и изгибающих моментов в сечениях конструкций на упругом основании.

Цель исследования – разработать математическое обеспечение САПР.

При проведении исследования использованы следующие **методы**: расчёта конструкций на упругом основании профессора Б.Н. Жемочкина, расчёта статически неопределимых систем, решения систем линейных уравнений.

Теоретический анализ. Основной задачей и конечной целью расчёта дорожной плиты является установление значений изгибающих моментов в её сечениях. Величина изгибающего момента $M(x)$ в конкретном сечении плиты с координатой x (рис. 1) зависит от усилий, приложенных до этого сечения (их величины, расположения, характера действия). Если рассматривать дорожную плиту как нагруженную балку, опёртую на упругое основание (рис. 1), то на ней можно выделить внешние нагрузки в количестве n, создаваемые колёсами автопоезда P_γ $\left(\gamma = \overline{1, n}\right)$, и реакцию основания $P(x)$, распределённую по некоторому закону вдоль оси абсцисс x.

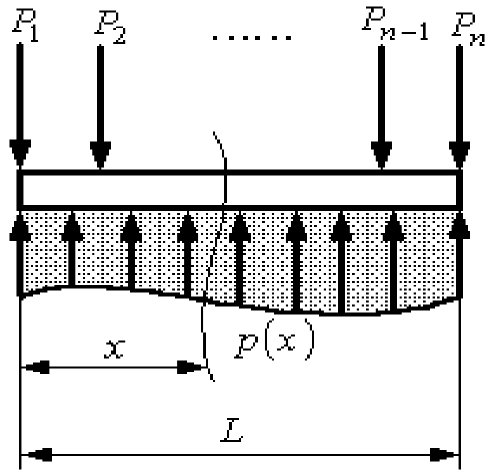

Рис. 1. Расчётная схема для определения величины изгибающего момента в сечении *x*

Из рисунка 1 видно, что силы $P_1, P_2, \ldots, P_m$ создают в сечении x отрицательный момент, а $p(x)$ – положительный, тогда суммарный момент $M(x)$ в рассматриваемом сечении будет равен

$$M(x) = \int_0^x \int_0^x p(x)dx - \sum_{\gamma=1}^{m} P_\gamma \left(x - x_\gamma\right), \tag{1}$$

где m – количество сил P_γ приложенных к балке до сечения x;

x_γ – координата γ-й нагрузки P_γ, м.

Количество нагрузок m до сечения x устанавливается довольно просто из условия $x_\gamma \le x$, где $\gamma = \overline{1, m}$. Сложность состоит в установлении закона распределения реакции основания $p(x)$ по длине плиты L. Так как балка, показанная на рис. 1, должна находиться в равновесии, то справедливо условие равенство

$$\int_0^L p(x)dx = \sum_{\gamma=1}^{n} P_\gamma \,. \tag{2}$$

Исходя из дефиниции определённого интеграла, можно записать

$$\int_0^L p(x)dx = \lim_{U\to\infty} \sum_{i=1}^{U} p(a_i)c \,; \; c = \frac{L}{U} = a_i - a_{i-1} \,, \tag{3}$$

где U – некоторое целое положительное число;

c – протяжённость некоторого элементарного участка, м;

a_i – значение аргумента в интервале $\left(x;\; x + \dfrac{L}{U}\right)$.

Если в выражении (3) опустить оператор $\lim$, но U придать довольно большое значение, то формула (3) своего смысла не потеряет, хотя математический знак равенства надо заменить знаком приблизительного равенства. Введём обозначение $X_i = p(a_i)c = p(a_i)\dfrac{L}{U}$, тогда

$$\sum_{i=1}^{U} X_i = \sum_{\gamma=1}^{n} P_\gamma \,. \tag{4}$$

Полученное уравнение (4) выражает сущность метода определения реакции основания под балкой, опирающейся на упругое основание, разработанного профессором Б.Н. Жемочкиным [5]. Согласно указанному методу балка разбивается на некоторое количество участков U равной длины c, в середине каждого участка приложена сила X_i (рис. 2). Таким образом, конструкция на упругом основании превращается в статически неопределимую систему с неизвестными силами X_i, $i = \overline{1, U}$.

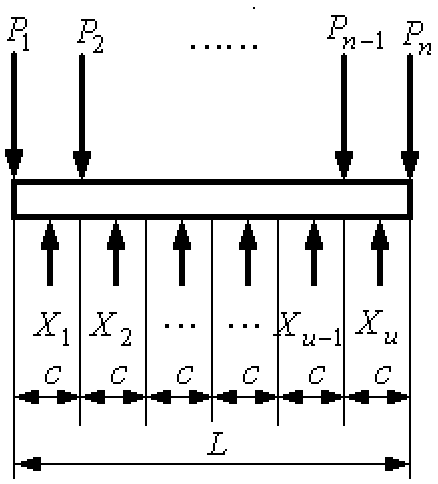

Рис. 2. Статически неопределимая система, эквивалентная конструкции на упругом основании

Суммарный изгибающий момент $M(x)$ в сечении x в данном случае определяется по формуле

$$M(x)=\sum_{i=1}^{k}X_i(x-c_i)-\sum_{\gamma=1}^{m}P_\gamma(x-x_\gamma), \tag{5}$$

где k – количество сил X_i, расположенных до сечения x, для которых $c_i \le x$.

$$c_i = c(i-0{,}5). \tag{6}$$

Точность получения конечного результата $M(x)$ зависит от числа элементарных участков U.

Усилия X_i определяются путём составления и решения системы канонических уравнений смешенного метода [5, 6]. Расчётные схемы к составлению уравнений показаны на рисунке 3.

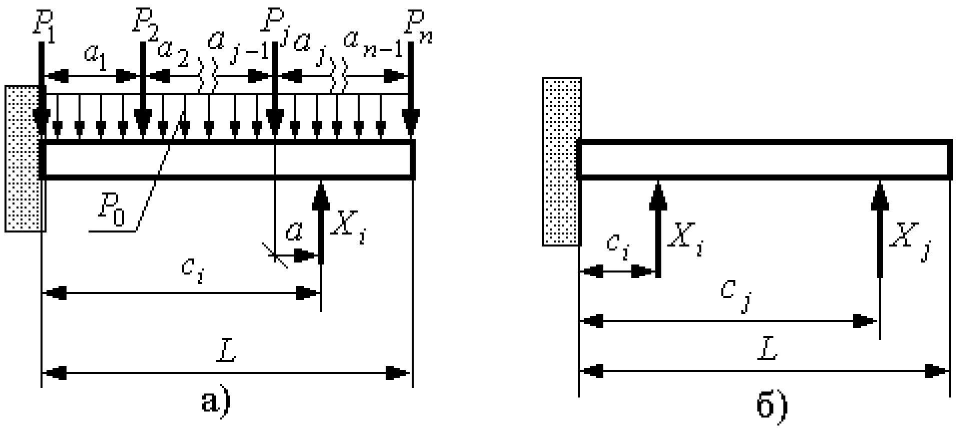

Рис. 3. Схемы для определения свободных членов (а) и коэффициентов при неизвестных (б) канонических уравнений

Результаты. Система канонических уравнений имеет вид матрицы, свободные члены Δ_{ip} которой определяются через интеграл Максвелла-Мора [5], а коэффициенты δ_{ij} включают в себя сумму прогиба балки по направлению единичной силы X_i от действия X_j, определяемого интегралом Максвелла-Мора, и осадки основания, зависящей от расстояния z между точками, где она определяется и где приложена единичная сила [5]

$$z = c_j - c_i. \tag{7}$$

Общий вид матрицы канонических уравнений следующий:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
\delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1j} & \dots & \delta_{1U} & c_1 & 1 & \Delta_{1p} \\
\delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2j} & \dots & \delta_{2U} & c_2 & 1 & \Delta_{2p} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\delta_{i1} & \delta_{i2} & \dots & \delta_{ij} & \dots & \delta_{iU} & c_i & 1 & \Delta_{ip} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\delta_{U1} & \delta_{U2} & \dots & \delta_{Uj} & \dots & \delta_{UU} & c_U & 1 & \Delta_{Up} \\
c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_U & 0 & 0 & P_0\dfrac{L^2}{2}+\sum\limits_{\gamma=1}^{n}P_\gamma x_\gamma \\
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & P_0 L+\sum\limits_{\gamma=1}^{n}P_\gamma
\end{array}\right), \tag{8}$$

где P_0 – собственный вес плиты, распределённый по её длине, Н/м.

Применительно к дорожной плите δ_{ij} определяются по формуле

$$\delta_{ij} = \frac{\left(1-\mu_0^2\right)}{\pi c K_0 E_0} \cdot F_{ij} + \frac{1}{EJ}\left(\frac{c_i^3}{3} + \frac{c_i^2}{2} z\right), \tag{9}$$

где μ_0 – коэффициент Пуассона материала основания;

$E,\ E_0$ – соответственно модули упругости материала плиты и деформации материала основания, Па;

K_0 – коэффициент перехода к модулю деформации материала основания под плитой [6, 7];

J – момент инерции поперечного сечения плиты, м^4;

F_{ij} – функция, характеризующая условия осадки основания [5].

Свободный член Δ_{ip} для произвольного случая нагружения дорожной плиты (рис. 3 а) с учётом её собственного веса в виде равномерно распределённой по длине нагрузки $P_0 = g\gamma_\delta BH$ (γ_δ – удельная масса материала плиты, кг/м^3) определяется по формуле [6]

$$\begin{aligned}\Delta_{ip} = \frac{1}{EJ}\Bigg\{&\int_0^a \left[\sum_{e=j+1}^{n}\left[P_e\left(\sum_{i=j}^{e-1} a_i - a + x\right)\right] + P_0\left(\frac{x^2}{2} + \left(L-c_i\right)\left(\frac{L-c_i}{2} + x\right)\right)\right] x dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{j-1}\int_0^{a_k}\left(\sum_{e=k+1}^{n}\left[P_e\left(\sum_{i=k+1}^{e-1} a_i + x\right)\right] + P_0\left(\frac{x^2}{2} + \left(L - \sum_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\frac{L-\sum_{i=1}^{k} a_i}{2} + x\right)\right)\right) \times \\ &\times \left(a + \sum_{i=k+1}^{j-1} a_i + x\right) \cdot dx\Bigg\}\end{aligned} \tag{10}$$

Непосредственное интегрирование правой части выражения (10) позволяет получить формулу для определения свободных членов Δ_{ip}

$$\begin{aligned}\Delta_{ip} = \frac{1}{EJ}\Bigg\{&\sum_{e=j+1}^{n}\left[P_e\left(\left(\sum_{i=j}^{e-1} a_i - a\right)\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}\right)\right] + P_0 \times \\ &\times\left(\frac{a^4}{8} + \left(L-c_i\right)\cdot\left(\frac{L-c_i}{4}a^2 + \frac{a^3}{3}\right)\right) + \sum_{k=1}^{j-1}\Bigg[\sum_{e=k+1}^{n}\Bigg[P_e\left(a + \sum_{i=k+1}^{j-1} a_i\right) a_k \sum_{i=k+1}^{e-1} a_i + \\ &+\left(\sum_{i=k+1}^{e-1} a_i + \sum_{i=k+1}^{j-1} a_i + a\right)\frac{a_k^2}{2} + \frac{a_k^3}{3}\Bigg] + P_0\Bigg(\frac{a_k^4}{8} + \left(a + \sum_{i=k+1}^{j-1} a_i\right)\frac{a_k^3}{6} + \left(L - \sum_{i=1}^{k} a_i\right)\times \\ &\times\left(\frac{L-\sum_{i=1}^{k} a_i}{4}a_k^2 + \frac{a_k^3}{3}\right) + \left(a + \sum_{i=k+1}^{j-1} a_i\right)\cdot\left(L - \sum_{i=1}^{k} a_i\right)\cdot\left(\frac{L-\sum_{i=1}^{k} a_i}{2}a_k + \frac{a_k^2}{2}\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{11}$$

$$a = c_i - x_j, \tag{12}$$

где j – номер внешней силы P_j, после которой приложена единичная i-я сила X_i, то есть $x_j < c_i < x_{j+1}$.

Выводы

Полученные зависимости (9) и (11) позволяют рассчитать коэффициенты и свободные члены системы уравнений (8) при любом распределении внешних подвижных нагрузок $P_1,\ P_2, \ldots, P_n$. Решение системы уравнений (8) позволяет получить значения сил реакций основания $X_1, X_2, \ldots, X_U$, по которым можно определить изгибающие моменты в сечениях плиты. Разработаны алгоритмы вычислительных процедур и компьютерная программа на языке C++, позволяющие определить изгибающие моменты в сечениях конструкций на упругом основании при их проектировании в САПР [1, 2, 3, 4].

Количество уравнений системы (8) можно задать достаточно большое, что обеспечивает высокую точность расчёта реакции основания и соответственно изгибающих моментов в конструкции на упругом основании. При ручном расчёте максимальное количество уравнений может быть до 10, что требует трудоёмкого решения и при относительно грубых результатах. Разработанное математическое обеспечение может быть использовано в САПР при проектировании сборных покрытий автомобильных дорог, железнодорожных шпал, фундаментных плит, оно позволяет проводить имитационное моделирование процессов нагружения дорожных плит внешней подвижной нагрузкой при переменных координатах внешних нагрузок и изменении их количества.

Список литературы

1. Афоничев Д.Н. Математическое обеспечение автоматизированного проектирования сборных дорожных покрытий / Д.Н. Афоничев // Моделирование систем и процессов. – 2012. – Вып. 4. – С. 14–16.
2. Афоничев Д.Н. Математическое обеспечение системы автоматизированного проектирования объектов производственно-транспортной инфраструктуры лесопромышленного комплекса / Д.Н. Афоничев, А.Д. Данилов, В.С. Петровский // Лесотехнический журнал. – 2014. – № 1. – С. 74–79.
3. Афоничев Д.Н. Средства автоматизированного проектирования автомобильных дорог / Д.Н. Афоничев // Моделирование систем и процессов. – 2011. – Вып. 4. – С. 13–17.
4. Афоничев Д.Н. Сборно-разборное дорожное покрытие для участков кривых в плане / Д.Н. Афоничев, В.А. Морковин, П.С. Рыбников // Актуальные направления научных исследований XXI века : теория и практика : сб. науч. тр. по матер. международной заочной науч.-практ. конф. – 2015. – № 2-2(13-2). – Ч. 3. – С. 25-30.
5. Жемочкин Б.Н. Практические методы расчёта фундаментных балок и плит на упругом основании / Б.Н. Жемочкин, А.П. Синицын. – Москва : Стройиздат, 1962. – 239 с.
6. Курьянов В.К. Совершенствование проектных решений сборных покрытий автомобильных дорог в системе автоматизированного проектирования / В.К. Курьянов, Д.Н. Афоничев. – Воронеж : Воронежская государственная лесотехническая академия, 2000. – 180 с.
7. Сборные покрытия автомобильных дорог / В.М. Могилевич, Е.Н. Дубровин, С.В. Коновалов и другие; под ред. В.М. Могилевича. – Москва : Высшая школа, 1972. – 384 с.