

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ ВЕКТОРНЫХ СВОЙСТВ ЕДИНИЦ В ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТИ

Владимир Иванович Трухачев, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики

Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I

DOI: 10.17238/issn2071-2243.2016.1.64

Цель исследования – разработка математической модели коэффициента полезного действия делителя потока с учетом основных параметров гидросистемы, режимов работы делителя и его конструктивных параметров. Объект исследования – четырехпоточный регулируемый делитель в гидросистеме мобильных машин. Методы исследования – теория подобия и размерности. Предлагается использование четырехпоточного регулируемого делителя в гидросистеме мобильных машин для обеспечения гидравлической энергией нескольких потребителей с независимыми скоростными и мощностными режимами работы от одного источника энергии. В качестве оценки эффективности работы делителя потока предложен коэффициент полезного действия. Коэффициент полезного действия делителя потока есть функция большого количества факторов, оперировать которыми для получения математической модели позволяет теория подобия и размерности. Для упрощения решения этой задачи необходимо увеличить количество основных единиц. Добиться увеличения количества основных величин до восьми возможно за счет разложения скалярной размерности длины $[L]$ по шести направлениям: $[L_x]$, $[L_{-x}]$, $[L_y]$, $[L_{-y}]$, $[L_z]$ и $[L_{-z}]$ в дополнение к размерности массы и времени, которые не подлежат трансформации в такой форме. Согласно π - теореме число безразмерных критериев сократится с восемнадцати до одиннадцати. Для получения безразмерных π - критериев в качестве ключевых аргументов использовали скоростной и силовой режимы работы делителя и гидропривода, геометрию уплотняющих зазоров делителя потока и его линейные размеры. Для упрощения получения математической модели процесса за счет сокращения количества критериев, входящих в уравнение, использовалась их способность трансформироваться в критерии другой формы путем операций перемножения, деления и возведения критериев в степень. Полученное уравнение дает возможность оценить уровень потерь мощности в делителе потока на стадии проектирования и распространить результаты исследования на ряд подобных делителей потока.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: теория подобия, основные единицы, векторные свойства единиц, делитель потока, коэффициент полезного действия, критериальное уравнение.

The research objective was to develop a mathematical model of efficiency of a flow divider with the account of key parameters of hydrosystem, operating modes of the divider and its design features. The object of research was a four-flow adjustable divider in the hydrosystem of mobile vehicles. Research methods included the theory of dimensional analysis and similarity. The author proposes to use a four-flow adjustable divider in the hydrosystem of mobile vehicles to supply several consumers with hydraulic energy with independent speed and power modes of operation from one energy source. Efficiency was proposed as an estimation of overall performance of this divider. Efficiency of a flow divider is the function of a considerable number of factors, which can be operated to receive a mathematical model with the help of the theory of dimensional analysis and similarity. To simplify the completion of this task it is necessary to increase the number of main units. It is possible to increase the number of main units up to eight by expanding the scalar dimension of length L in six directions: $[L_x]$, $[L_{-x}]$, $[L_y]$, $[L_{-y}]$, $[L_z]$ and $[L_{-z}]$ in addition to the dimensions of weight and time, which cannot be transformed in such form. According to the π - theorem the number of dimensionless criteria will decrease from eighteen to eleven. In order to obtain the dimensionless π - criteria the author used such key arguments as speed and power operating modes of the divider and hydrodrive, the geometry of sealing backlashes of the flow divider and its linear sizes. To simplify the development of the mathematical model of the process by reducing the number of criteria included in the equation the author used their ability to be transformed into criteria of other forms by operations of multiplication, division and raising the criteria to power. The obtained equation allows estimating the level of losses of power in a flow divider at the stage of design and applying the results of research to a number of similar flow dividers.

KEY WORDS: similarity theory, main units, vector properties of units, flow divider, efficiency, criterion equation.

Введение

Разработка четырехпоточного регулируемого делителя потока позволяет обеспечить гидравлической энергией нескольких потребителей с независимыми скоростными и мощностными режимами работы от одного источника энергии при характерном для объемных делителей потока отсутствии дросселирования рабочей жидкости [3, 5, 6, 8, 11, 12].

Одним из главных показателей, определяющих степень совершенства объемных гидромашин, и в частности делителей потока, с точки зрения потерь мощности, является коэффициент полезного действия [2].

Цель исследования – разработка математической модели коэффициента полезного действия делителя потока с учетом основных параметров гидросистемы, режимов работы делителя и его конструктивных параметров.

Объект исследования – четырехпоточный регулируемый делитель в гидросистеме мобильных машин.

В общем виде коэффициент полезного действия (КПД) делителя потока можно записать

$$\eta = f(Q_0, \bar{P}_0, U, K, R, B, r, \mu, Q_1, Q_3, P_1, P_2, P_3, P_4, \Delta P'_1, \Delta P'_2, r_1, m). \quad (1)$$

Обозначение и названия величин, входящих в уравнение (1), приведены в таблице.

Методика исследований

Для получения математической модели процесса воспользуемся теорией подобия и размерностей, которая дает возможность оперировать с таким большим количеством факторов.

Получить полное решение этой задачи с точностью до постоянной возможно, если разность между числом существенных для процесса переменных n и числом основных величин λ равна единице. Увеличить количество основных величин до восьми возможно за счет разложения скалярной размерности длины $[L]$ по шести направлениям: $[L_x]$, $[L_{-x}]$, $[L_y]$, $[L_{-y}]$, $[L_z]$ и $[L_{-z}]$ [4, 10] в дополнение к размерности массы и времени, которые не подлежат трансформации в такой форме.

В результате скалярные размерности физических величин, входящих в уравнение (1), после преобразования трансформируются в векторные (см. табл.).

Начало координат является точкой отсчета ширины статора делителя потока по оси Z , т.е. её отрицательная составляющая будет равна нулю, поэтому в дальнейших исследованиях она не учитывалась. Это означает, что количество основных единиц уменьшилось с восьми до семи. В уравнении (1) число существенных для процесса переменных $n = 18$, количество основных величин $\lambda = 7$, следовательно, $n - \lambda = 11$.

В соответствии с π -теоремой число безразмерных критериев сократится до одиннадцати и уравнение (1) в критериальной форме примет вид

$$\eta = \Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{11}). \quad (2)$$

В качестве ключевых аргументов выделим $Q_0, \bar{P}_0, U, K, R, B$ и r , которые определяют собой скоростной Q_0 и силовой \bar{P}_0 режимы работы делителя и гидропривода, учитывают геометрию уплотняющих зазоров делителя U, K [7] и его линейные размеры R, B, r . На их основе образуем безразмерные критерии, входящие в уравнение (2):

$$\pi_1 = Q_0^{a_1} \times \bar{P}_0^{b_1} \times U^{c_1} \times K^{d_1} \times R^{e_1} \times B^{f_1} \times r^{g_1} \times \mu, \quad (3)$$

$$\pi_2 = Q_0^{a_2} \times \bar{P}_0^{b_2} \times U^{c_2} \times K^{d_2} \times R^{e_2} \times B^{f_2} \times r^{g_2} \times P_1, \quad (4)$$

$$\pi_3 = Q_0^{a_3} \times \bar{P}_0^{b_3} \times U^{c_3} \times K^{d_3} \times R^{e_3} \times B^{f_3} \times r^{g_3} \times P_2, \quad (5)$$

$$\pi_4 = Q_0^{a_4} \times \bar{P}_0^{b_4} \times U^{c_4} \times K^{d_4} \times R^{e_4} \times B^{f_4} \times r^{g_4} \times P_3, \quad (6)$$

$$\pi_5 = Q_0^{a_5} \times \bar{P}_0^{b_5} \times U^{c_5} \times K^{d_5} \times R^{e_5} \times B^{f_5} \times r^{g_5} \times P_4, \quad (7)$$

$$\pi_6 = Q_0^{a_6} \times \bar{P}_0^{b_6} \times U^{c_6} \times K^{d_6} \times R^{e_6} \times B^{f_6} \times r^{g_6} \times \Delta P', \quad (8)$$

$$\pi_7 = Q_0^{a_7} \times \bar{P}_0^{b_7} \times U^{c_7} \times K^{d_7} \times R^{e_7} \times B^{f_7} \times r^{g_7} \times \Delta P', \quad (9)$$

$$\pi_8 = Q_0^{a_8} \times \bar{P}_0^{b_8} \times U^{c_8} \times K^{d_8} \times R^{e_8} \times B^{f_8} \times r^{g_8} \times Q_1, \quad (10)$$

$$\pi_9 = Q_0^{a_9} \times \bar{P}_0^{b_9} \times U^{c_9} \times K^{d_9} \times R^{e_9} \times B^{f_9} \times r^{g_9} \times Q_3, \quad (11)$$

$$\pi_{10} = Q_0^{a_{10}} \times \bar{P}_0^{b_{10}} \times U^{c_{10}} \times K^{d_{10}} \times R^{e_{10}} \times B^{f_{10}} \times r^{g_{10}} \times r_1, \quad (12)$$

$$\pi_{11} = Q_0^{a_{11}} \times \bar{P}_0^{b_{11}} \times U^{c_{11}} \times K^{d_{11}} \times R^{e_{11}} \times B^{f_{11}} \times r^{g_{11}} \times m. \quad (13)$$

Размерность аргументов в векторной транскрипции с учетом знака вектора

Физическая величина и её размерность	Обозначение	Векторная формула размерности с учетом знака
Расход во входной магистрали, м ³ /с	Q ₀	$L_x^{\frac{1}{2}} L_{-x}^{\frac{1}{2}} L_y^{\frac{1}{2}} L_{-y}^{\frac{1}{2}} L_z$ Т ⁻¹
Давление во входной магистрали, МПа	\bar{P}_0	$L_x^{-\frac{1}{6}} L_{-x}^{-\frac{1}{6}} L_y^{-\frac{1}{6}} L_{-y}^{-\frac{1}{6}} L_z^{-\frac{1}{3}}$ М Т ⁻²
Ширина уплотняющих зазоров, м	K	$L_x^{\frac{5}{32}} L_{-x}^{\frac{3}{32}} L_y^{\frac{7}{32}} L_{-y}^{\frac{1}{32}} L_z^{\frac{1}{2}}$
Длина уплотняющих зазоров, м	U	$L_x^{\frac{13}{32}} L_{-x}^{\frac{3}{32}} L_y^{\frac{11}{32}} L_{-y}^{\frac{5}{32}}$
Большая полуось статора, м	R	$L_x^{\frac{1}{2}} L_{-x}^{\frac{1}{2}}$
Ширина статора, м	B	L _z
Меньшая полуось статора, м	r	$L_y^{\frac{1}{2}} L_{-y}^{\frac{1}{2}}$
Динамический коэффициент вязкости, Па·с	μ	$L_x^{-\frac{3}{8}} L_{-x}^{-\frac{1}{8}} L_y^{-\frac{3}{8}} L_{-y}^{-\frac{1}{8}}$ М Т ⁻¹
Давление в первой магистрали, МПа	P ₁	$L_x^{-\frac{1}{6}} L_{-x}^{-\frac{1}{6}} L_y^{-\frac{1}{6}} L_{-y}^{-\frac{1}{6}} L_z^{-\frac{1}{3}}$ М Т ⁻²
Давление во второй магистрали, МПа	P ₂	$L_x^{-\frac{1}{6}} L_{-x}^{-\frac{1}{6}} L_y^{-\frac{1}{6}} L_{-y}^{-\frac{1}{6}} L_z^{-\frac{1}{3}}$ М Т ⁻²
Давление в третьей магистрали, МПа	P ₃	$L_x^{-\frac{1}{6}} L_{-x}^{-\frac{1}{6}} L_y^{-\frac{1}{6}} L_{-y}^{-\frac{1}{6}} L_z^{-\frac{1}{3}}$ М Т ⁻²
Давление в четвертой магистрали, МПа	P ₄	$L_x^{-\frac{1}{6}} L_{-x}^{-\frac{1}{6}} L_y^{-\frac{1}{6}} L_{-y}^{-\frac{1}{6}} L_z^{-\frac{1}{3}}$ М Т ⁻²
Перепад давлений между потребителями в первом блоке, МПа	ΔP' ₁	$L_x^{-\frac{1}{6}} L_{-x}^{-\frac{1}{6}} L_y^{-\frac{1}{6}} L_{-y}^{-\frac{1}{6}} L_z^{-\frac{1}{3}}$ М Т ⁻²
Перепад давлений между потребителями во втором блоке, МПа	ΔP' ₂	$L_x^{-\frac{1}{6}} L_{-x}^{-\frac{1}{6}} L_y^{-\frac{1}{6}} L_{-y}^{-\frac{1}{6}} L_z^{-\frac{1}{3}}$ М Т ⁻²
Расход в первой магистрали, МПа	Q ₁	$L_x^{\frac{1}{2}} L_{-x}^{\frac{1}{2}} L_y^{\frac{1}{2}} L_{-y}^{\frac{1}{2}} L_z$ Т ⁻¹
Расход в третьей магистрали, МПа	Q ₃	$L_x^{\frac{1}{2}} L_{-x}^{\frac{1}{2}} L_y^{\frac{1}{2}} L_{-y}^{\frac{1}{2}} L_z$ Т ⁻¹
Радиус ротора, м	r ₁	$L_x^{\frac{1}{4}} L_{-x}^{\frac{1}{4}} L_y^{\frac{1}{4}} L_{-y}^{\frac{1}{4}}$
Масса шибера, м	m	M

Для определения показателей степеней аргументов, входящих в эти уравнения, распишем уравнение (3) через размерности его членов (см. табл.). В соответствии с методикой [1, 9] примем показатели степени последнего члена в этом и последующих уравнениях (4) – (13) для π - критериев равными единице.

$$\begin{aligned} [L_x^0 L_{-x}^0 L_y^0 L_{-y}^0 L_z^0 M^0 T^0] &= \left[L_x^2 L_{-x}^2 L_y^2 L_{-y}^2 L_z T^{-1} \right]^{a_1} \times \left[L_x^{-1/6} L_{-x}^{-1/6} L_y^{-1/6} L_{-y}^{-1/6} L_z^{-1/3} M T^{-2} \right]^{b_1} \times \\ &\times \left[L_x^{5/32} L_{-x}^{3/32} L_y^{7/32} L_{-y}^{1/32} L_z^2 \right]^{c_1} \times \left[L_x^{13/32} L_{-x}^{3/32} L_y^{11/32} L_{-y}^{5/32} \right]^{d_1} \times \left[L_x^2 L_{-x}^2 \right]^{e_1} [L_z]^{f_1} \times \left[L_y^2 L_{-y}^2 \right]^{g_1} \times \\ &\times \left[L_x^{-3/8} L_{-x}^{-1/8} L_y^{-3/8} L_{-y}^{-1/8} M T^{-1} \right]. \end{aligned}$$

После несложного преобразования получим

$$\begin{aligned} [L_x^0 L_{-x}^0 L_y^0 L_{-y}^0 L_z^0 M^0 T^0] &= L_x^{1/2 a_1 - 1/6 b_1 + 5/32 c_1 + 13/32 d_1 + 1/2 e_1 - 3/8} \times L_{-x}^{1/2 a_1 - 1/6 b_1 + 3/32 c_1 + 3/32 d_1 + 1/2 e_1 - 1/8} \times \\ &\times L_y^{1/2 a_1 - 1/6 b_1 + 7/32 c_1 + 11/32 d_1 + 1/2 g_1 - 3/8} \times L_{-y}^{1/2 a_1 - 1/6 b_1 + 1/32 c_1 + 5/32 d_1 + 1/2 g_1 - 1/8} \times L_z^{a_1 - 1/3 b_1 + 1/2 c_1 + f} \times M^{b_1 + 1} \times T^{-a_1 - 2 b_1 - 1}. \end{aligned}$$

Приравнявая показатели степеней в размерностях правой и левой частей уравнения при одноименных основных единицах, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1/2 a_1 - 1/6 b_1 + 5/32 c_1 + 13/32 d_1 + 1/2 e_1 - 3/8 = 0. \\ 1/2 a_1 - 1/6 b_1 + 3/32 c_1 + 3/32 d_1 + 1/2 e_1 - 1/8 = 0. \\ 1/2 a_1 - 1/6 b_1 + 7/32 c_1 + 11/32 d_1 + 1/2 g_1 - 3/8 = 0. \\ 1/2 a_1 - 1/6 b_1 + 1/32 c_1 + 5/32 d_1 + 1/2 g_1 - 1/8 = 0. \\ a_1 - 1/3 b_1 + 1/2 c_1 + f = 0. \\ b_1 + 1 = 0. \\ -a_1 - 2b_1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, имеем

$$a_1 = 1, b_1 = -1, c_1 = 2/3, d_1 = 2/3, e_1 = -1/3, f_1 = -1/3, g_1 = -1/3. \text{ Отсюда}$$

$$\pi_1 = \frac{Q_0 \mu}{P_0 B R r} \cdot \sqrt[3]{\frac{U^2 K^2}{B^2 R r}}.$$

Аналогично уравнению (3) решены уравнения (4) – (9). Расчетные значения показателей степеней: $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = -1$, остальные показатели равны нулю. Отсюда

$$\pi_2 = \frac{P_1}{P_0}; \pi_3 = \frac{P_2}{P_0}; \pi_4 = \frac{P_3}{P_0}; \pi_5 = \frac{P_4}{P_0}; \pi_6 = \frac{\Delta P'_1}{P_0}; \pi_7 = \frac{\Delta P'_2}{P_0}.$$

Подобным образом, решив уравнения (10) – (13), получим следующие расчетные значения показателей степеней:

$$a_8 = -1; b_8 = c_8 = d_8 = e_8 = f_8 = g_8 = 0; a_9 = -1; b_9 = c_9 = d_9 = e_9 = f_9 = g_9 = 0;$$

$$a_{10} = b_{10} = c_{10} = d_{10} = f_{10} = 0, e_{10} = -1/2; g_{10} = -1/2;$$

$$a_{11} = 2; b_{11} = -1; c_{11} = 0; d_{11} = 0; e_{11} = -2/3; f_{11} = -2/3; g_{11} = -2/3.$$

Тогда имеем

$$\pi_8 = Q_1/Q_0 = e_1/2; \pi_9 = Q_3/Q_0 = e_2/2; \pi_{10} = \frac{r_1}{\sqrt{Rr}}; \pi_{11} = \frac{Q_0^2 m}{\bar{P}_0 (BRr)^2 \sqrt[3]{BRr}},$$

где $e_1 = 2Q_1/Q_0$ – коэффициент регулирования первого блока делителя;

$e_2 = 2Q_3/Q_0$ – коэффициент регулирования второго блока делителя.

Подставив полученные критерии в уравнение (2), получим

$$\eta = \Phi \left(\frac{\frac{Q_0 \mu}{\bar{P}_0 BRr} \cdot \sqrt[3]{\frac{U^2 K^2}{B^2 Rr}}; \frac{P_1}{\bar{P}_0}; \frac{P_2}{\bar{P}_0}; \frac{P_3}{\bar{P}_0}; \frac{P_4}{\bar{P}_0}; \frac{\Delta P'_1}{\bar{P}_0}; \frac{\Delta P'_2}{\bar{P}_0}; \frac{e_1}{2}; \frac{e_2}{2}; \frac{r_1}{\sqrt{Rr}}; \frac{Q_0^2 m}{\bar{P}_0 (BRr)^2 \sqrt[3]{BRr}} \right). \quad (14)$$

Для упрощения получения математической модели процесса за счет сокращения количества критериев, входящих в уравнение (14), воспользуемся одним из важных их свойств. Оно заключается в их способности трансформироваться в критерии другой формы путем операций перемножения, деления и возведения критериев в степень [9, 10].

Представим полученные критерии в следующем виде:

$$\pi_1^* = \pi_1 \pi_{10}^{-1} = \frac{Q_0 \mu}{\bar{P}_0 B r_1 \sqrt{Rr}} \cdot \sqrt[3]{\frac{U^2 K^2}{B^2 Rr}}; \pi_2^* = \pi_2 \pi_3 \pi_6 \pi_8 = \frac{P_1 P_2 \Delta P'_1 e_1}{2 \bar{P}_0^3};$$

$$\pi_3^* = \pi_4 \pi_5 \pi_7 \pi_9 = \frac{P_3 P_4 \Delta P'_2 e_2}{2 \bar{P}_0^3}; \pi_4^* = \pi_8^{\frac{1}{2}} \pi_9^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{2}; \pi_5^* = \pi_{11} = \frac{Q_0^2 m}{\bar{P}_0 (BRr)^2 \sqrt[3]{BRr}},$$

где $e = \sqrt{e_1 e_2}$ – коэффициент регулирования четырехпоточного делителя потока.

В результате преобразований уравнение (14) примет вид

$$\eta = \frac{Q_0^3 m \mu P_1 P_2 P_3 P_4 \Delta P'_1 \Delta P'_2 e e_1 e_2}{8 \bar{P}_0^8 B^4 r_1 \sqrt{Rr} (Rr)^2} \sqrt[3]{\frac{U^2 K^2}{R^2 r^2}}. \quad (15)$$

Результаты

На основе использования теории подобия и размерностей составлено критериальное уравнение, учитывающее влияние на КПД делителя потока различных факторов. В целях упрощения критериального уравнения использовалась векторная система единиц [8, 12] для определения размерностей величин, входящих в это уравнение.

В результате разработана математическая модель КПД делителя потока в зависимости от основных параметров гидросистемы, режимов работы делителя и его конструктивных параметров. Полученное уравнение дает возможность оценить уровень потерь мощности в делителе потока на стадии проектирования и распространить результаты исследования на ряд подобных делителей потока.

Список литературы

1. Ветров Е.Ф. П-теорема в приложении к воздушной сепарации / Е.Ф. Ветров // Труды ВИСХОМ. – 1980. – Вып. 99. – С. 10-14.
2. Гидравлика, гидромашин и гидроприводы : учебник для машиностроительных вузов / Т.М. Башта [и др.]. – 2-е изд., перераб. – Москва : Машиностроение, 1982. – 423 с.
3. Гряно Л.П. Гидродинамические и гидрообъемные передачи в трансмиссиях транспортных средств : учеб. пособие / Л.П. Гряно, Ю.М. Исаев. – Санкт-Петербург : Изд-во СПб ГПУ, 2000. – 234 с.
4. Ляхтер В.М. Гидравлическое моделирование / В.М. Ляхтер, А.М. Прудовский. – Москва : Энергоатомиздат, 1984. – 393 с.
5. Новиков Г.В. Автоматическое регулирование тягового привода машин с бесступенчатыми трансмиссиями / Г.В. Новиков // Тракторы и сельхозмашины. – 2003. – № 8. – С. 25-27.
6. Петров В.А. Гидрообъемные трансмиссии самоходных машин / В.А. Петров. – Москва : Машиностроение, 1988. – 248 с.
7. Трухачев В.И. Определение приведенной ширины уплотняющих зазоров в шиберном делителе потока / В.И. Трухачев // Вестник Воронежского государственного аграрного университета. – 2011. – Вып. 3 (30). – С. 36-39.
8. Трухачев В.И. Применение делителей потока в гидрообъемном приводе мобильных машин / В.И. Трухачев, В.В. Болотов // Молодёжный вектор развития аграрной науки : материалы 64-й науч. студенческой конференции. – Воронеж : ФГБОУ ВПО Воронежский ГАУ, 2013. – Ч. I. – С. 15-18.
9. Трухачев В.И. Применение теории подобия и размерности для определения оптимальных параметров реза и режимов резания при обработке древесины / В.И. Трухачев, Т.В. Тришина, В.Г. Козлов // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.science-education.ru/121-19298> (дата обращения: 16.09.2015).
10. Хантли Г. Анализ размерностей / Г. Хантли. – Москва : Мир, 1970. – 174 с.
11. Хорош И.А. Гидропривод сельскохозяйственной техники / Н.И. Селиванов, И.А. Хорош. – Красноярск : Изд-во Красноярского государственного аграрного университета, 2006. – 229 с.
12. Щельцын Н.А. Современные бесступенчатые трансмиссии сельскохозяйственных тракторов / Н.А. Щельцын, Л.А. Фрумкин, И.В. Иванов // Тракторы и сельхозмашины. – 2011– № 11. – С. 18-26.