

О МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЗКАХ

Александр Михайлович Слиденко¹
Виктор Михайлович Слиденко²

¹Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I
²Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

Моделирование волновых процессов необходимо для реализации сложных алгоритмов управления с помощью компьютерных систем. Необходимым этапом проектирования является расчет характеристик тонких пластин различной конфигурации, которые являются частью мембранных насосов, клапанов, пульсаторов и резонаторов и испытывают динамические импульсные нагрузки. Рассматриваются метод Фурье и разностный метод для поиска решения начально-краевых задач с уравнениями колебаний плоской тонкой пластины (мембраны) прямоугольной формы при наличии импульсных нагрузок. Для проведения численных расчетов и сравнения полученных результатов разработана программа в системе Mathcad. Импульсные локальные нагрузки моделируются заданным распределением начальной скорости для малого элемента пластины. Начальная скорость малого элемента пластины определяется из условия сохранения количества движения. Методом Фурье получено предельное решение при наличии локальной импульсной нагрузки, когда объем малого элемента пластины стремится к нулю. Данное решение подтверждено численными расчетами. В качестве разностных методов рассмотрены два основных метода расщепления: метод переменных направлений и метод дробных шагов. Применение чистой неявной схемы метода переменных направлений приводит к большой погрешности, растущей по времени даже при равномерной нагрузке. Наилучшее приближение получено для метода дробных шагов с весовыми коэффициентами. Метод Фурье и разностные схемы метода дробных шагов с весовыми коэффициентами могут использоваться для расчета параметров колебаний тонких пластин, работающих при импульсных локальных нагрузках в различных алгоритмах управления. Сравнение решений, полученных анализируемыми методами на линейных задачах, позволяет выбрать приемлемые параметры разностных схем для получения достоверных результатов. Ключевые слова: динамические импульсные нагрузки, уравнения колебаний, ряды Фурье, разностные схемы, метод переменных направлений, метод дробных шагов, алгоритмах управления.

ON THE METHODS OF APPROXIMATE SOLUTION OF EQUATIONS OF MEMBRANE OSCILLATIONS AT IMPULSE LOADS

Alexander M. Slidenko¹
Viktor M. Slidenko²

¹ Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter the Great

² National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute»

Modeling of wave processes is necessary for the realization of comprehensive controlling algorithms by means of computer systems. A necessary stage of designing is the calculation of parameters of thin plates with different configuration that are part of membrane pumps, valves, pulsators and resonators and experience the dynamic impulse loads. The authors consider the Fourier method and the difference method for searching for initial boundary values with the equations of oscillation of a flat thin rectangular plate (membrane) in the presence of impulse loads. A program in the Mathcad system was developed for performing the numerical calculations and comparison of the obtained results. Impulse local loads were modeled by the given distribution of initial velocity for a small element of the plate. The initial velocity of the small element of the plate was determined from the condition of preservation of momentum. The limiting solution in the presence of local impulse load when the volume of the small element of the plate tends to zero was obtained by the Fourier method. The existence of this solution was confirmed with numerical calculations. Two main methods of splitting (the alternating directions method and the method of fractional steps) were considered as difference methods. The application of a pure implicit scheme of the alternating directions method leads to a big error growing with time even at the balanced

load. The best approximation was obtained for the method of fractional steps with weight coefficients. The Fourier method and difference schemes of the method of fractional steps with weight coefficients can be used for calculating the oscillation parameters of thin plates operating with impulse local loads in various controlling algorithms. A comparison of solutions obtained by the analyzed methods on linear problems allows choosing the acceptable parameters of difference schemes for obtaining reliable results.

KEY WORDS: dynamic impulse loads, oscillation equations, Fourier series, difference schemes, alternating directions method, method of fractional steps, controlling algorithms.

Введение

В мембранных клапанах управления устройств ударного действия применяются тонкие пластины (мембраны), которые подвержены импульсным нагрузкам [2, 4, 8]. Для таких пластин колебания описываются двумерными уравнениями гиперболического типа [1, 3, 5]. В случае линейных уравнений эффективными для поиска решения можно считать метод Фурье и разностный метод. Наличие импульсных (ударных) нагрузок приводит к усложнению задачи. Вопрос точности и достоверности полученных результатов выходит на первый план при решении задач управления [6]. Компьютерные системы позволяют провести сравнение решений, полученных различными методами и найти приемлемые параметры разностных методов. В предлагаемой работе выбрана система программирования Mathcad в силу прозрачности алгоритмов и эффективности модульного программирования [7].

1. Уравнение колебаний прямоугольной мембраны и двумерный метод Фурье

Пусть тонкая пластина (мембрана) в состоянии покоя имеет форму прямоугольника, ограниченного прямыми линиями: $x = 0, x = L_1, y = 0, y = L_2$.

Задача о свободных колебаниях мембраны сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 U(t, x, y)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U(t, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(t, x, y)}{\partial y^2} \right), \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < L_1, \quad 0 < y < L_2, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$U(0, x, y) = f(x, y), \quad \frac{\partial U(0, x, y)}{\partial t} = F(x, y) \quad (2)$$

и краевыми условиями, заданными на границе прямоугольника

$$U(t, 0, y) = U(t, L_1, y) = U(t, x, 0) = U(t, x, L_2) = 0, \quad (3)$$

где $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, E – модуль упругости;

ρ – плотность материала.

Краевые условия (3) означают, что мембрана закреплена по контуру.

С целью сравнительного анализа методов поиска решения начально-краевой задачи и применения этих методов при наличии импульсных нагрузок приведем коротко метод Фурье, изложенный в [1].

Решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2), представляют в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента:

$$U(t, x, y) = X(x)Y(y)T(t). \quad (4)$$

Из первого условия (3) следует, что $X(0)Y(y)T(t) = 0$. При условии, что $Y(y) \neq 0, T(t) \neq 0, X(0) = 0$. Аналогично получают равенства: $X(L_1) = 0, Y(0) = 0, Y(L_2) = 0$. Таким образом, условия на границе имеют вид

$$X(0) = 0, \quad X(L_1) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(L_2) = 0. \quad (5)$$

Производные вторых порядков от функции (4) по каждому из аргументов равны

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X''YT, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = XY''T, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = XYT''.$$

Подставляя выражения для производных в уравнения (1) и разделяя переменные, получают

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}.$$

Правая часть равенства не зависит от переменных x и y , а левая часть – от переменной t . Поэтому оно может выполняться только при условии

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \text{const}.$$

Так как отношение $\frac{X''}{X}$ зависит только от x , а $\frac{Y''}{Y}$ – только от y , то сумма $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}$ может быть постоянной лишь при условиях

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\mu^2,$$

где λ и μ – постоянные.

В результате для отыскания функций $X(x), Y(y), T(t)$ получены краевые задачи

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(L_1) = 0, \quad (6)$$

$$Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(L_2) = 0, \quad (7)$$

$$T''(t) + a^2(\lambda^2 + \mu^2)T(t) = 0. \quad (8)$$

Решения уравнений (6) и (7) имеют вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x,$$

$$Y(y) = D_1 \cos \mu y + D_2 \sin \mu y.$$

Краевые условия $X(0) = X(L_1) = 0$ приводят к соотношениям $C_1 = 0$ и $\lambda L_1 = k\pi$, где k – целое число. Аналогично из условий $Y(0) = Y(L_2) = 0$ следует, что $D_1 = 0$ и $\mu L_2 = n\pi$ (n – целое число).

Собственные числа λ_k и μ_n и соответствующие им собственные функции определяются формулами

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L_1}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{L_2}, \quad (9)$$

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{L_1}, \quad Y_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L_2}, \quad (10)$$

где k и n – любые целые положительные числа.

Для каждой пары собственных чисел (9) уравнение (8) примет вид

$$T''(t) + \pi^2 a^2 \left(\frac{k^2}{L_1^2} + \frac{n^2}{L_2^2} \right) T(t) = 0.$$

Запишем общее решение этого уравнения

$$T_{k,n}(t) = a_{k,n} \cos \omega_{k,n} t + b_{k,n} \sin \omega_{k,n} t, \quad (11)$$

где $\omega_{k,n} = \pi a \sqrt{\frac{k^2}{L_1^2} + \frac{n^2}{L_2^2}}$ – собственные частоты колебаний мембраны,

$a_{k,n}, b_{k,n}$ – произвольные постоянные.

Произведение функций (10) и (11) образует функции $U_{k,n}(t, x, y)$, удовлетворяющие уравнению (1) и краевым условиям (3):

$$U_{k,n}(t, x, y) = (a_{k,n} \cos \omega_{k,n} t + b_{k,n} \sin \omega_{k,n} t) \cdot \sin \lambda_k x \cdot \sin \mu_n y. \quad (12)$$

Решение, удовлетворяющее начальным условиям (2), ищется в виде ряда, составленного из частных решений (12)

$$U(t, x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{k,n} \cos \omega_{k,n} t + b_{k,n} \sin \omega_{k,n} t) \sin \frac{k\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2}.$$

Подставляя значение $t = 0$ в функцию $U(t, x, y)$ и в производную $\frac{\partial}{\partial t} U(t, x, y)$, получим:

$$U(0, x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} \sin \frac{k\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2} = f(x, y), \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U(0, x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{k,n} b_{k,n} \sin \frac{k\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2} = F(x, y). \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) представляют разложения функций двух переменных в двойные ряды Фурье. Система функций $\sin \frac{k\pi x}{L_1} \cdot \sin \frac{n\pi y}{L_2}$ в области

$D: (0 \leq x \leq L_1, 0 \leq y \leq L_2)$ ортогональна [1]. Тогда формулы для отыскания коэффициентов ряда Фурье имеют вид:

$$a_{k,n} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x, y) \sin \frac{k\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2} dx dy, \quad (15)$$

$$b_{k,n} = \frac{4}{L_1 L_2 \omega_{k,n}} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} F(x, y) \sin \frac{k\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2} dx dy. \quad (16)$$

Для тестовых задач метод Фурье реализован в системе Mathcad при заданных распределениях начального отклонения и скорости точек мембраны от положения равновесия (17).

$$f(x, y) = 0,05 \left[\frac{x}{L_1} - \left(\frac{x}{L_1} \right)^2 \right] \cdot \left[\frac{y}{L_2} - \left(\frac{y}{L_2} \right)^2 \right], \quad F(x, y) = \frac{1}{2} \pi a \cdot \sin \left(\frac{\pi x}{4} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi y}{4} \right). \quad (17)$$

Рассмотрим ситуацию, когда в начальный момент времени по центру тонкой пластины толщиной δ наносится удар, который характеризуется величиной импульса P . Будем предполагать, что некоторая окрестность центральной точки (прямоугольная пластинка размеров $\varepsilon \times \varepsilon \times \delta$) получает начальную скорость (рис. 1).

Начально-краевая задача будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 U(t, x, y)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U(t, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(t, x, y)}{\partial y^2} \right), \quad t \in [0, T], \quad 0 \leq x \leq L_1, \quad 0 \leq y \leq L_2, \quad (18)$$

$$U(0, x, y) = f(x, y), \quad \frac{\partial U(0, x, y)}{\partial t} = F(x, y), \quad 0 \leq x \leq L_1, \quad 0 \leq y \leq L_2, \quad (19)$$

$$U(t, 0, y) = U(t, L_1, y) = U(t, x, 0) = U(t, x, L_2) = 0. \quad (20)$$

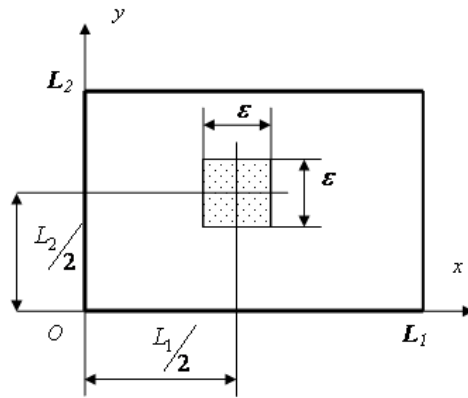


Рис. 1. Мембрана и окрестность центральной точки

Считаем, что в момент времени $t = 0$ (см. рис. 1) прямоугольная часть пластины в центре $D(\varepsilon)$ объемом $\varepsilon^2 \cdot \delta$ (ε – малое число) приобретает скорость, которая рассчитывается из условия равенства импульсов движения по формуле

$$V_0 = \frac{P}{\rho \varepsilon^2 \delta}.$$

Таким образом, предполагаемое начальное распределение скорости точек пластины можно представить в виде

$$F(x, y) = \begin{cases} V_0, & \text{если } (x; y) \in D(\varepsilon), \\ 0, & \text{если } (x; y) \notin D(\varepsilon). \end{cases}$$

Вычислим коэффициенты ряда Фурье при условии начального равновесия, то есть $f(x, y) = 0$:

$$\begin{aligned} a_{k,n} &= 0, \\ b_{k,n}(\varepsilon) &= \frac{4}{L_1 L_2 \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2}} \int_{\frac{L_1-\varepsilon}{2}}^{\frac{L_1+\varepsilon}{2}} \int_{\frac{L_2-\varepsilon}{2}}^{\frac{L_2+\varepsilon}{2}} \frac{P}{\rho \varepsilon^2 \delta} \sin \frac{k\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2} dx dy = \\ &= \frac{16P}{\pi a \sqrt{\left(\frac{k}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2} \rho \varepsilon^2 \delta n k \pi^2} \sin \frac{k\pi \varepsilon}{2L_1} \cdot \sin \frac{k\pi}{2} \cdot \sin \frac{n\pi \varepsilon}{2L_2} \cdot \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Вычислим предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_{k,n}(\varepsilon)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_{k,n}(\varepsilon) = \frac{4P}{\pi a \rho \delta L_1 L_2 \sqrt{\left(\frac{k}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2}} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

При вычислении предела были учтены следующие свойства (первый замечательный предел):

$$\frac{\sin \frac{k\pi \varepsilon}{2L_1}}{\frac{k\pi \varepsilon}{2L_1}} \rightarrow 1, \quad \frac{\sin \frac{n\pi \varepsilon}{2L_2}}{\frac{n\pi \varepsilon}{2L_2}} \rightarrow 1.$$

Предельное решение задачи (18)-(20) записывается в виде тригонометрического ряда

$$U^*(t, x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{k,n} \cos \omega_{k,n} t + b_{k,n} \sin \omega_{k,n} t) \sin \frac{k\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2}.$$

Исследуем численно зависимость решения задачи от параметра ε (рис. 2).

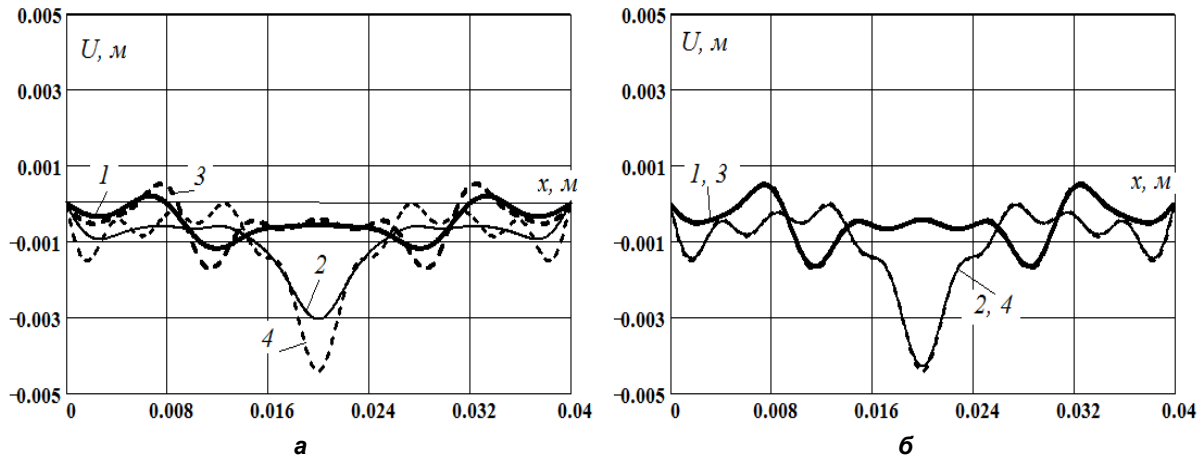


Рис. 2. Расчетный прогиб мембраны в различные моменты времени: а – $\varepsilon = 0,004$; б – $\varepsilon = 0,001$; 1 – $U\left(0,2, x, \frac{L_2}{2}\right)$; 2 – $U\left(0,4, x, \frac{L_2}{2}\right)$; 3 – $U^*\left(0,2, x, \frac{L_2}{2}\right)$; 4 – $U^*\left(0,4, x, \frac{L_2}{2}\right)$

Графики (рис. 2) подтверждают факт существования предела при $\varepsilon \rightarrow 0$ и соответственно некоторого предельного решения задачи.

На рисунке 3 показаны колебания точек мембраны по времени. Взаимодействие отраженных волн прогибов мембраны приводит к скачкам амплитуд в центре мембраны.

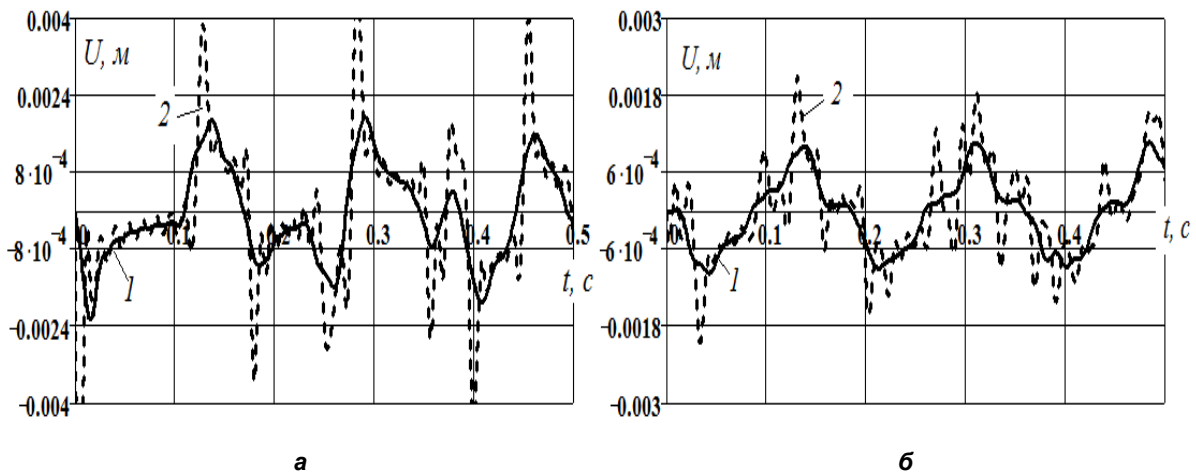


Рис. 3. Колебания точек мембраны по времени: а) точка $\left(\frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{4}\right)$; б) точка $\left(\frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{4}\right)$; 1 – U ; 2 – U^*

2. Метод переменных направлений и метод дробных шагов

В теории разностных схем под методом расщепления понимают два основных метода: метод переменных направлений (МПН) и метод дробных шагов (МДШ) [9, 10].

Рассмотрим построение разностных схем для задачи (1)-(3).

Вводится пространственно-временная сетка с шагами h_1 , h_2 и τ соответственно по переменным x , y и t :

$$\omega_{h_1, h_2}^\tau = \{x_i = ih, i = 0, \dots, N_1; y_j = jh_2, j = 0, \dots, N_2; t_n = n\tau, n = 0, \dots, N_3\}.$$

На этой сетке дифференциальная задача (1)-(3) аппроксимируется разностной задачей.

Рассмотрим метод переменных направлений. В схеме МПН, как и во всех методах расщепления, шаг по времени τ разбивается на два. На каждом дробном временном шаге один из пространственных дифференциальных операторов аппроксимируется неявно, а второй – явно. На следующем временном шаге явная и неявная аппроксимации меняются местами.

Схема МПН для задачи (1)-(3) имеет вид:

$$\frac{u_{ij}^{n+1/2} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1/2}}{(\tau/2)^2} = a^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1/2} - 2u_{ij}^{n+1/2} + u_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{i,j-1}^n}{h_2^2} \right), \quad (21)$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1/2} + u_{ij}^n}{(\tau/2)^2} = a^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1/2} - 2u_{ij}^{n+1/2} + u_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2} \right), \quad (22)$$

В системе (21) на первом дробном шаге $n + \frac{1}{2}$ дифференциальный оператор $a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ аппроксимируется неявно, а оператор $a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – явно.

Система уравнений решается методом прогонки в направлении переменной x . В результате получаем значения сеточной функции на временном слое $t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$.

В системе (22) оператор $a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ аппроксимируется неявно на временном слое $t_{n+1} = t_n + \tau$, а оператор $a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – явно на слое $t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$. С помощью метода прогонки в направлении переменной y получаем значения сеточной функции на слое $t_{n+1} = t_n + \tau$.

Данная схема имеет второй порядок аппроксимации по времени. Вопрос об устойчивости этой схемы будет решен в процессе проведения численных экспериментов.

Сравнение с решением Фурье позволит оценить влияние основных параметров и выбрать оптимальные параметры разностной схемы [11].

Запишем уравнения (21)-(22) в стандартной форме $a_i y_{i+1} - b_i y_i + c_i y_{i-1} = -d_i$ для реализации метода прогонки на каждом временном слое в соответствующем направлении.

Прогонка в направлении переменной x :

$$\left(\frac{a^2 \tau^2}{4h_1^2} \right) u_{i+1,j}^{n+1/2} - \left(1 + \frac{a^2 \tau^2}{2h_1^2} \right) u_{i,j}^{n+1/2} + \left(\frac{a^2 \tau^2}{4h_1^2} \right) u_{i-1,j}^{n+1/2} = - \left(2u_{ij}^n - u_{ij}^{n-1/2} + \frac{a^2 \tau^2}{4h_2^2} (u_{i,j+1}^{n+1/2} - 2u_{ij}^{n+1/2} + u_{i,j-1}^{n+1/2}) \right).$$

Прогонка в направлении переменной y :

$$\left(\frac{a^2\tau^2}{4h_2^2}\right)u_{i,j+1}^{n+1} - \left(1 + \frac{a^2\tau^2}{2h_2^2}\right)u_{i,j}^{n+1} + \left(\frac{a^2\tau^2}{4h_2^2}\right)u_{i,j-1}^{n+1} = -\left(2u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - u_{ij}^n + \frac{a^2\tau^2}{4h_1^2}\left(u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right)\right).$$

Рассмотрим схему метода дробных шагов (МДШ).

В методе дробных шагов используются только неявные разностные операторы. Для задачи (1)-(3) схема МДШ имеет вид

$$\frac{u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\tau}{2}\right)^2} = 2a^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2} \right), \quad (23)$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + u_{ij}^n}{\left(\frac{\tau}{2}\right)^2} = 2a^2 \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2} \right). \quad (24)$$

На каждом дробном шаге системы (23)-(24) решаются методом прогонки. В системе (20) на первом дробном шаге $n + \frac{1}{2}$ дифференциальный оператор $a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ аппроксимируется неявно. Система уравнений решается методом прогонки в направлении переменной x . В результате получаем значения сеточной функции на временном слое $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\tau}{2}$. В системе (24) оператор $a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ аппроксимируется неявно на временном слое $t_{n+1} = t_n + \tau$. С помощью метода прогонки в направлении переменной y получаем значения сеточной функции на слое $t_{n+1} = t_n + \tau$.

Система уравнений в стандартной форме имеет следующий вид.

Прогонка в направлении x :

$$\left(\frac{a^2\tau^2}{2h_1^2}\right)u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{a^2\tau^2}{h_1^2}\right)u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{a^2\tau^2}{2h_1^2}\right)u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\left(2u_{ij}^n - u_{ij}^{n-\frac{1}{2}}\right). \quad (25)$$

Прогонка в направлении y :

$$\left(\frac{a^2\tau^2}{2h_2^2}\right)u_{i,j+1}^{n+1} - \left(1 + \frac{a^2\tau^2}{h_2^2}\right)u_{i,j}^{n+1} + \left(\frac{a^2\tau^2}{h_2^2}\right)u_{i,j-1}^{n+1} = -\left(2u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - u_{ij}^n\right). \quad (26)$$

3. Сравнение методов в системе MATHCAD и основные результаты

Общая функциональная схема программы приведена на рисунке 4.

Перечислим назначение основных функций в программе:

$DN(N, T, M, F, f)$ – управляет процессом решения разностных уравнений на дробном шаге;

$trdag(a, b, c, d, N, U, V)$ – решает систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей методом прогонки;

$F(x, y)$ – начальное распределение скорости;

$f(x, y)$ – начальное перемещение;

$UT(t, x, y)$ – вычисление коэффициентов и конечного отрезка ряда Фурье.

Рассмотрим реализацию метода переменных направлений для начально-краевой задачи, в которой задается начальное отклонение мембраны от положения равновесия.

На рисунке 5 представлено сравнение решений, полученных методом Фурье и разностными методами (схемы МПН и МДШ).

На рисунке 6 рассмотрены сечения мембраны по одной из переменных, а также колебания по времени средней точки мембраны. Общий вывод заключается в том, что погрешность неявной схемы МПН растет по времени (колебания являются затухающи-

ми при отсутствии физических причин). Величина этой погрешности зависит от параметров $\Delta_1 = \frac{a^2 \tau^2}{4h_1^2}$ и $\Delta_2 = \frac{a^2 \tau^2}{4h_2^2}$.

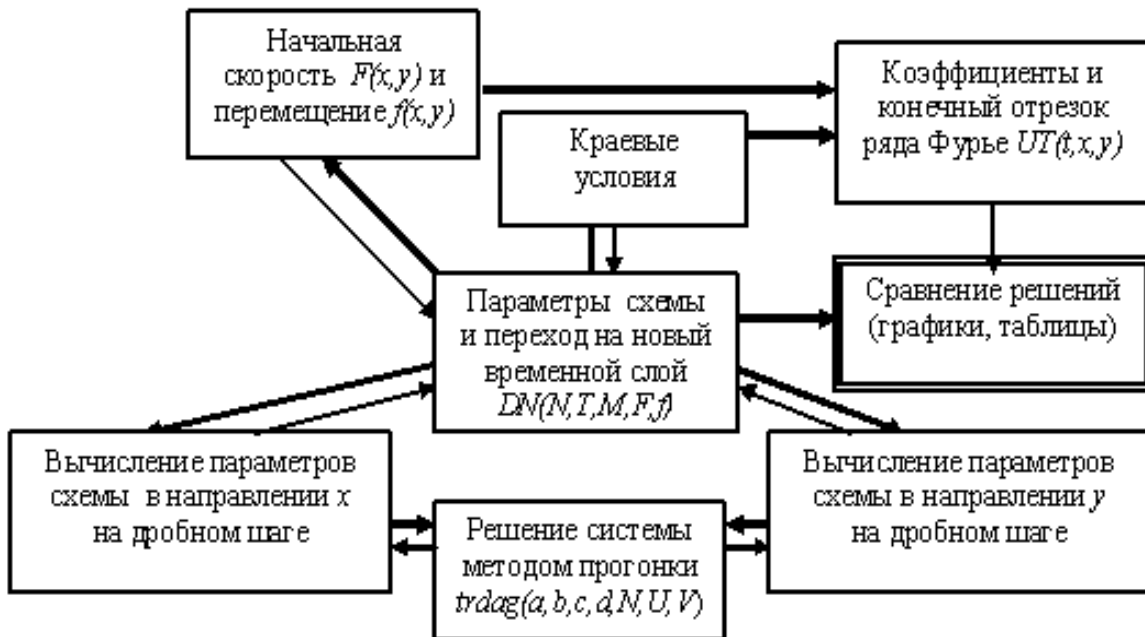


Рис. 4. Функциональная схема общей программы

Разностная схема МДШ с весами имеет вид

$$\frac{u_{ij}^{n+1/2} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1/2}}{(\tau/2)^2} = 2a^2 \left(\sigma \frac{u_{i+1,j}^{n+1/2} - 2u_{ij}^{n+1/2} + u_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1^2} + (1-2\sigma) \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1,j}^n}{h_1^2} \right) +$$

$$+ 2a^2 \left(\sigma \frac{u_{i+1,j}^{n-1/2} - 2u_{ij}^{n-1/2} + u_{i-1,j}^{n-1/2}}{h_1^2} \right),$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1/2} + u_{ij}^n}{(\tau/2)^2} = 2a^2 \left(\sigma \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2} + (1-2\sigma) \frac{u_{i,j+1}^{n+1/2} - 2u_{ij}^{n+1/2} + u_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_2^2} \right) +$$

$$+ 2a^2 \left(\sigma \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{i,j-1}^n}{h_2^2} \right).$$

Решение задачи при начальном отклонении мембраны от положения равновесия представлено на рисунке 5, данные которого подтверждают эффективность применения схемы МДШ с весовыми коэффициентами.

Решения при локальной импульсной нагрузке представлены на рисунках 6 и 7. В этой ситуации наблюдается большее расхождение между решениями при сохранении качественной картины колебаний.

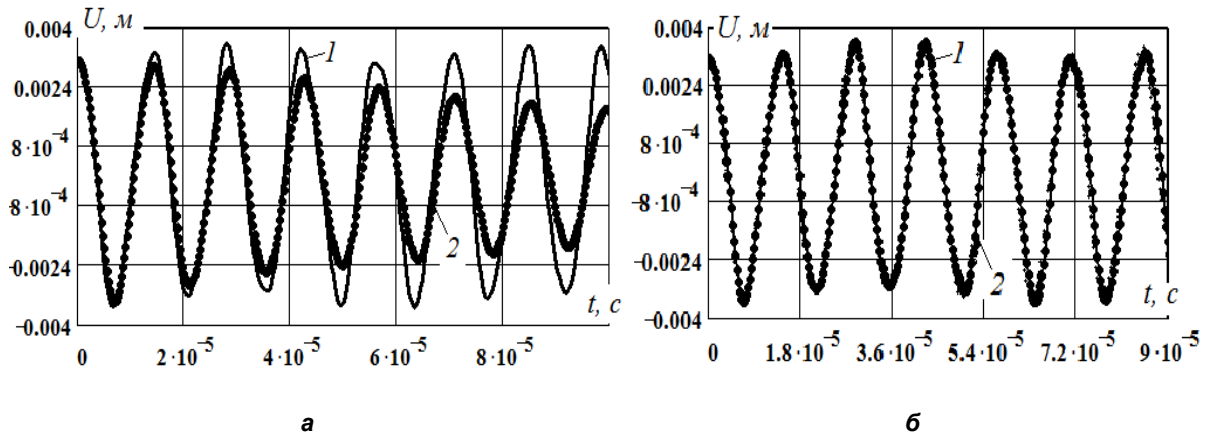


Рис. 5. Колебания средней точки мембраны: $x = 0,5L_1$, $y = 0,5L_2$ по времени
 а) 1 – метод Фурье, 2 – неявная схема МПН; б) 1 – метод Фурье, 2 – схема МДШ с весами

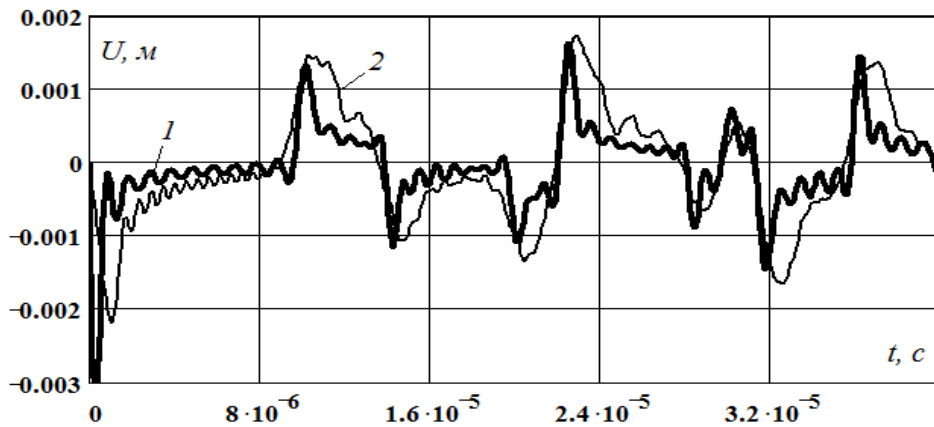


Рис. 6. Колебания средней точки мембраны по времени:
 1 – предельное решение, 2 – разностный метод (МДШ с весами)

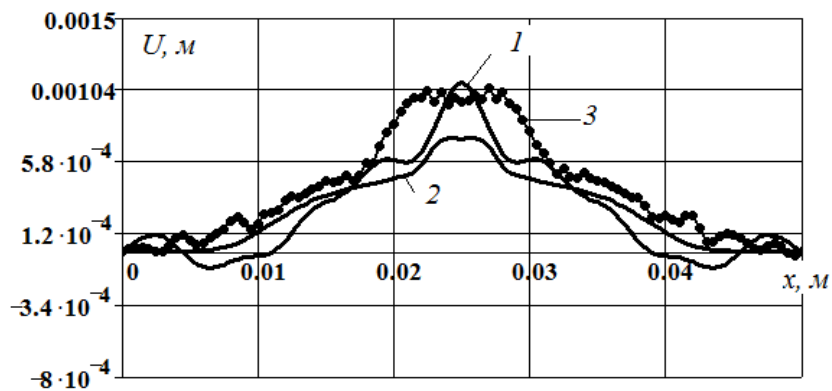


Рис. 7. Распределение отклонений точек мембраны (среднее сечение)
 в фиксированный момент времени: 1 – предельное решение;
 2 – решение Фурье при $\varepsilon = 0,005$; 3 – разностный метод (МДШ с весами)

Основные выводы

1. Разработаны компьютерные программы, позволяющие сравнивать решения задачи колебаний тонких пластин, полученные двумерным методом Фурье и разностными методами. Такое сравнение дает возможность находить оптимальные параметры

разностных схем для получения достоверных результатов, что в конечном итоге позволит создать надежную конструкцию мембранного типа.

2. Подтверждены лучшие свойства разностных схем метода дробных шагов с весами при локальных импульсных нагрузках.

3. Чистые неявные схемы метода переменных направлений пригодны только для малых значений скорости звука материала мембраны.

4. Основная погрешность применяемых приближенных методов связана с наличием импульсных локальных нагрузок и развитием процесса колебаний по времени.

Библиографический список

1. Араманович И.Г. Уравнения математической физики : учеб. пособие/ И.Г. Араманович, В.И. Левин. – Москва : Наука, 1969. – 288 с.
2. Адаптивне функціонування імпульсних виконавчих органів гірничих машин / В.М. Сліденко, С.П. Шевчук, О.В. Замараєва, Л.К. Лістовщик. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 180 с.
3. Василенко М.В. Теорія коливань і стійкості руху : підручник / М.В. Василенко, О.М. Алексейчук. – Київ : Вища школа, 2004. – 525 с.
4. Иванов А.П. Динамика систем с механическими соударениями / А.П. Иванов. – Москва : Международная программа образования, 1997. – 336 с.
5. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – Москва : Высшая школа, 1970. – 712 с.
6. Кубышкин В.А. Управление колебаниями с использованием подвижного воздействия в распределенных системах / В.А. Кубышкин // Идентификация систем и задачи управления : сб. тр. IX Международной конференции SICPRO 12. Москва 30 января – 2 февраля 2012. – Москва, 2012. – С. 936-948.
7. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD : учеб. пособие / В.А. Охорзин. – 2-е изд., исп. и доп. – Санкт-Петербург : Изд-во «Лань», 2008. – 352 с.
8. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов / Г.Я. Пановко. – Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 176 с.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем : учеб. пособие / А.А. Самарский. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1977. – 656 с.
10. Самарский А.А. Численные методы : учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – Москва : Наука, 1989. – 432 с.
11. Сліденко А.М. Исследование дискретно-непрерывной адаптивной модели ударного устройства / А.М. Сліденко, В.М. Сліденко // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27, № 1. – С. 54-64.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ Принадлежность к организации

Александр Михайлович Сліденко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и математических методов в экономике, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I», Российская Федерация, г. Воронеж, тел. 8(473) 270-51-49, E-mail: alexandr.slidenko@yandex.ru.

Виктор Михайлович Сліденко – кандидат технических наук, доцент кафедры электромеханического оборудования энергоемких производств, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина, г. Киев, тел. 8(1038044) 458-82-83, E-mail: vslidenko@yandex.ua.

Дата поступления в редакцию 29.08.2016

Дата принятия к печати 08.09.2016

AUTHOR CREDENTIALS Affiliations

Alexander M. Slidenko – Candidate of Physics-math. Sciences, Docent, the Dept. of Applied Mathematics and Mathematical Methods in Economics, Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter the Great, Russian Federation, Voronezh, tel. 8(473) 270-51-49, E-mail: alexandr.slidenko@yandex.ru.

Viktor M. Slidenko – Candidate of Engineering Sciences, Docent, the Dept. of Electrical-Mechanical Equipment for Power-Consuming Industry, National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine, Kiev, tel. 8(1038044) 458-82-83, E-mail: vslidenko@yandex.ua.

Date of receipt 29.08.2016

Date of admittance 08.09.2016