УДК 631.111:519.24/25
DOI: 10.17238/issn2071-2243.2018.3.219

СРАВНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИКОЙ

Александр Михайлович Слиденко
Елена Анатольевна Агапова

Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I

В статье приводится анализ возможности рационального применения основных методов типа градиентного спуска при поиске решений задач оптимального управления экономическими системами с помощью односекторной или двухсекторной моделей экономики. В нелинейных задачах для поиска решения применяются численные методы, поэтому для поиска минимума целевой функции возможно применение только разностных градиентных методов. Эти методы адаптированы по отношению к применяемым численным методам решения систем дифференциальных уравнений. Численное решение системы уравнений представляется сеточной функцией, поэтому использование градиентных методов возможно только в разностной форме, то есть частные производные аппроксимируются разностными отношениями. Сравниваются алгоритмы простого разностного градиентного метода и метода типа скорейшего (ускоренного) спуска, которые реализованы в виде функциональных блоков в системе Mathcad. Для определения оптимального шага итерационного процесса проводится линеаризация зависимости численного решения K_N (основные фонды в конечный момент времени) от шага процесса h. Рассмотрены примеры задач оптимального управления для односекторной и двухсекторной моделей экономики с уравнениями типа Солоу и производственными функциями типа Кобба-Дугласа. Методы градиентного спуска реализованы для случая различных параметров управления: трудовых ресурсов и внешних инвестиций (вложений в основные фонды). Показано преимущество метода ускоренного спуска с адаптивным шагом итерационного процесса. Метод ускоренного спуска позволяет автоматически осуществить выбор шага итерационного процесса при изменении входных данных задачи, который обеспечивает устойчивость итерационного процесса. Показано существенное уменьшение числа итераций для метода ускоренного спуска по сравнению с обычным методом разностного градиентного спуска.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: модель экономики, производственные функции, оптимальное управление, метод градиентного спуска, разностный градиент, итерационный процесс.

COMPARISON OF ITERATIVE METHODS IN THE PROBLEMS OF SEARCH FOR OPTIMAL MANAGEMENT OF THE ECONOMY

Alexander M. Slidenko
Elena A. Agapova

Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter the Great

The authors analyze the possibility of rational application of the main methods of gradient descent type in solving the problems of optimal management of economic systems by means of one- or two-sector models of economy. Nonlinear problems are solved using the numerical methods; therefore the minimum of objective function can be found using only the differential gradient methods. These methods are adapted in relation to the applied numerical methods of solving the systems of the differential equations. The numerical solution of the system of equations is represented by the grid function; therefore the gradient methods can be used only in the differential form, i.e. differential derivatives are approximated by difference relations. The authors compare the algorithms of simple differential gradient method and method of steepest descent that are realized in the form of function blocks in the Mathcad system. In order to determine the optimal step of iterative process the linearization of dependence of the numerical K_N solution (fixed assets at the final timepoint) from the process step of h is performed. The authors consider the examples of optimal management problems for one- and two-sector models of economy with Solow-type equations and Cobb-Douglas production functions. The methods of gradient descent are realized for the case of different parameters of management: e.g. labor resources and external investments (investments in fixed assets). The article shows the advantages of the steepest descent method with the adaptive step of iterative process. The method of steepest descent allows for an automatic choice of step of iterative process when changing the input data of the problem, which provides stability of the iterative process. A significant decrease in the

number of iterations is shown for the steepest descent method compared to the conventional method of differential gradient descent.
KEYWORDS: model of economy, production functions, optimal management, gradient descent method, differential gradient, iterative process.

Задачам оптимального управления экономической системой с помощью математических моделей посвящены работы ряда авторов [1, 3–5, 7–11], исследовавших численные методы с итерационными алгоритмами. В анализируемых литературных источниках представлены в основном прямые и обратные задачи оптимизации, использующие встроенные функции прикладных программ. Целью предложенной работы являются выбор для решения задач наиболее эффективного метода оптимизации (типа метода скорейшего спуска [2, 12]), разработка алгоритма, его реализация и проверка на примерах односекторной и двухсекторной моделей экономики.

Общая схема финансовых потоков для односекторной модели экономики и управляющие параметры представлены на рисунке 1.

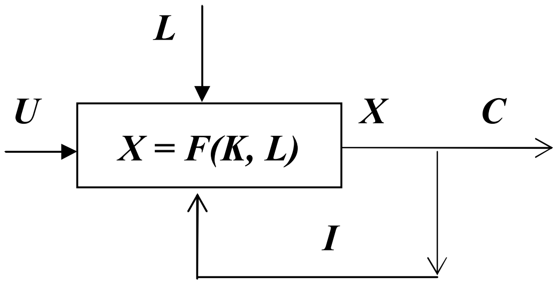


Рис. 1. Схема финансовых потоков и управляющие параметры (*L* и *U*)

Приняты следующие основные обозначения переменных:

t – время;

K(t) – объем основных фондов сектора;

L(t) – трудовые ресурсы;

U(t) – внешние инвестиции на развитие основных фондов;

I(t) – внутренние инвестиции;

C(t) – продукция потребления;

$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$ – производственная функция, принимаемая в форме степенной функции (функции типа Кобба-Дугласа).

Рассмотрим систему уравнений и краевых условий, которые составляют задачу оптимального управления:

$$\frac{d}{dt}K(t) = \sigma AK(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{\beta} + \gamma U(t) - \mu K(t), \quad t \in [0, T] \; ; \tag{1}$$

$$X = I + C; \quad I = \sigma X \; ; \quad C = (1-\sigma)X \; ; \tag{2}$$

$$K(0) = \overline{K}_0; \quad K(T) = \overline{K}_1, \tag{3}$$

где $A, \alpha, \beta, \gamma, \sigma, \mu$ – положительные постоянные.

Дифференциальное уравнение (1) относительно основных фондов содержит дополнительную управляющую переменную *U(t)*, которая учитывает поступление инвестиций на обновление и развитие основных фондов.

Необходимо найти такое управление *{L(t), U(t)}*, при котором справедливы условия (1) – (3), и интегральный функционал

$$V(L) = \int_0^T \left(L(t)^2 + U(t)^2 \right) dt \tag{4}$$

принимает минимальное значение.

Интеграл в формуле (4) выражает суммарные затраты на трудовые ресурсы и внедрение внешних инвестиций. Задача (1) – (4) на условный экстремум функционала приводится к задаче на экстремум расширенного функционала методом множителей Лагранжа [9, 13]. Вводится расширенный функционал, который содержит функцию Лагранжа и учитывает уравнение связи (1)

$$V^*\left(L,U,K,\frac{dK}{dt},\lambda\right)=\int_0^T\left\{L^2+U^2+\lambda\left[\frac{dK}{dt}-\sigma AK^{\alpha}L^{\beta}-\gamma U+\mu K\right]\right\}dt\,.$$

Подынтегральная функция имеет вид

$$F^*\left(L,U,K,\frac{dK}{dt},\lambda\right)=L^2+U^2+\lambda\left[\frac{dK}{dt}-\sigma AK^{\alpha}L^{\beta}-\gamma U+\mu K\right]. \qquad (5)$$

Здесь $\lambda(t)$ – функция Лагранжа.

Составляется система уравнений Эйлера вида

$$\frac{\partial F^*}{\partial L}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{L}}\right)=0;\quad \frac{\partial F^*}{\partial U}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{U}}\right)=0;\quad \frac{\partial F^*}{\partial \lambda}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{\lambda}}\right)=0;\quad \frac{\partial F^*}{\partial K}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{K}}\right)=0.$$

Находим частные производные и составляем уравнения Эйлера:

$$2L(t)-\lambda(t)\sigma AK(t)^{\alpha}\beta L(t)^{\beta-1}=0; \qquad (6)$$

$$2U(t)-\gamma\lambda(t)=0; \qquad (7)$$

$$\frac{d}{dt}K(t)=\sigma AK(t)^{\alpha}\cdot L(t)^{\beta}+\gamma U(t)-\mu K(t); \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=-\lambda(t)\left(\sigma A\alpha K(t)^{\alpha-1}\cdot L(t)^{\beta}-\mu\right). \qquad (9)$$

Запишем начально-краевую задачу

$$L=\left(0{,}5\lambda\sigma AK^{\alpha}\beta\right)^{\frac{1}{2-\beta}}; \qquad (10)$$

$$U=0{,}5\gamma\lambda; \qquad (11)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=-\lambda(t)\left(\sigma A\alpha K(t)^{\alpha-1}\cdot L(t)^{\beta}-\mu\right); \qquad (12)$$

$$\frac{d}{dt}K(t)=\sigma AK(t)^{\alpha}\cdot L(t)^{\beta}+\gamma U(t)-\mu K(t); \qquad (13)$$

$$K(0)=\overline{K}_0;\quad K(T)=\overline{K}_1;\quad \lambda(0)=\lambda_0. \qquad (14)$$

Решение системы уравнений (10) – (14) при заданном λ_0 (начальном значении функции Лагранжа) находится одним из численных методов [2, 9].

Задача решается на дискретном множестве $[0,T]_\tau=\{t_0,t_1,...,t_N\}$, $\tau=\frac{T}{N}$, $t_i=t_{i-1}+\tau$. В результате получены значения сеточных функций, то есть основные фонды имеют вид вектора $K=\{K_1, K_2, ..., K_N\}$.

Для выбора оптимального значения λ_0 вводится целевая функция

$$S(\lambda_0,K_N,\overline{K}_1)=\omega\left(K_N-\overline{K}_1\right)^2, \qquad (15)$$

где ω – весовой коэффициент.

Величина λ_0 обеспечивает минимум функции (15). Для поиска оптимального значения λ_0 применяется разностный аналог метода градиентного спуска.

Рассмотрим основные формулы.

Итерационный процесс *простого разностного градиентного метода* имеет вид

$$\lambda_0^i = \lambda_0^{i-1} - h\frac{\Delta S\left(\lambda_0^{i-1}, K_N, \overline{K}_1\right)}{\Delta\lambda_0},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{16}$$

где $\Delta\lambda_0$ – приращение переменной λ_0;

$\Delta S\left(\lambda_0^{i-1}, K_N, \overline{K}_1\right) = \Delta S\left(\lambda_0^{i-1}\right)$ – приращение целевой функции;

m – количество итераций до выполнения некоторого условия, например, $\left|K_N - \overline{K}_1\right| < \xi$, где ξ – заданная точность.

В *методе ускоренного спуска* величина h, определяющая шаг итерационного процесса, выбирается из некоторого условия оптимальности. Рассмотрим выбор h подробно.

Величина K_N определена численным методом и не выражается в виде аналитической зависимости от начального значения λ_0. Поэтому дальнейшие преобразования проводятся на дискретном множестве с дискретными функциями.

Пусть $\lambda_0^i = \lambda_0^{i-1} - h\dfrac{\Delta S\left(\lambda_0^{i-1}, K_N, \overline{K}_1\right)}{\Delta\lambda_0}$, тогда

$$S(\lambda_0{}^i, K_N, \overline{K}_1) = S\left(\lambda_0{}^{i-1} - h\frac{\Delta S\left(\lambda_0^{i-1}\right)}{\Delta\lambda_0}, K_N, \overline{K}_1\right) = \omega\left(K_N\left(\lambda_0{}^{i-1} - h\frac{\Delta S\left(\lambda_0^{i-1}\right)}{\Delta\lambda_0}\right) - \overline{K}_1\right)^2. \tag{17}$$

Проведем линеаризацию дискретной функции $K_N\left(\lambda_0{}^{i-1} - h\dfrac{\Delta S\left(\lambda_0^{i-1}\right)}{\Delta\lambda_0}\right)$ в точке $\lambda_0{}^i$.

Приведенные функции являются дискретными и определяются компьютерной программой на дискретном множестве точек. Выделим линейную часть функции K_N:

$$K_N\left(\lambda_0{}^{i-1} - h\frac{\Delta S\left(\lambda_0^{i-1}\right)}{\Delta\lambda_0}\right) \approx K_N\left(\lambda_0^{i-1}\right) - h\frac{\Delta K_N\left(\lambda_0^{i-1}\right)}{\Delta\lambda_0}\cdot\frac{\Delta S\left(\lambda_0^{i-1}\right)}{\Delta\lambda_0}.$$

Здесь в формуле для приращения функции производные заменены разностными отношениями. Полученное выражение подставляем в формулу (17), тогда получаем функцию одной переменной h

$$S(\lambda_0{}^i, K_N, \overline{K}_1) = \omega\left(K_N\left(\lambda_0{}^{i-1}\right) - \overline{K}_1 - h\frac{\Delta K_N\left(\lambda_0^{i-1}\right)}{\Delta\lambda_0}\cdot\frac{\Delta S\left(\lambda_0^{i-1}\right)}{\Delta\lambda_0}\right)^2 = \varphi(h).$$

Величину h определяем из необходимого условия экстремума (минимума) функции одной переменной: $\varphi'(h) = \dfrac{d\varphi}{dh} = 0$. В результате получаем формулу для вычисления h на каждом итерационном шаге

$$h = \frac{K_N\left(\lambda_0{}^{i-1}\right) - \overline{K}_1}{\dfrac{\Delta K_N\left(\lambda_0^{i-1}\right)}{\Delta\lambda_0}\cdot\dfrac{\Delta S\left(\lambda_0^{i-1}\right)}{\Delta\lambda_0}}. \tag{18}$$

Функциональная схема программы в системе Mathcad представлена на рисунке 2.

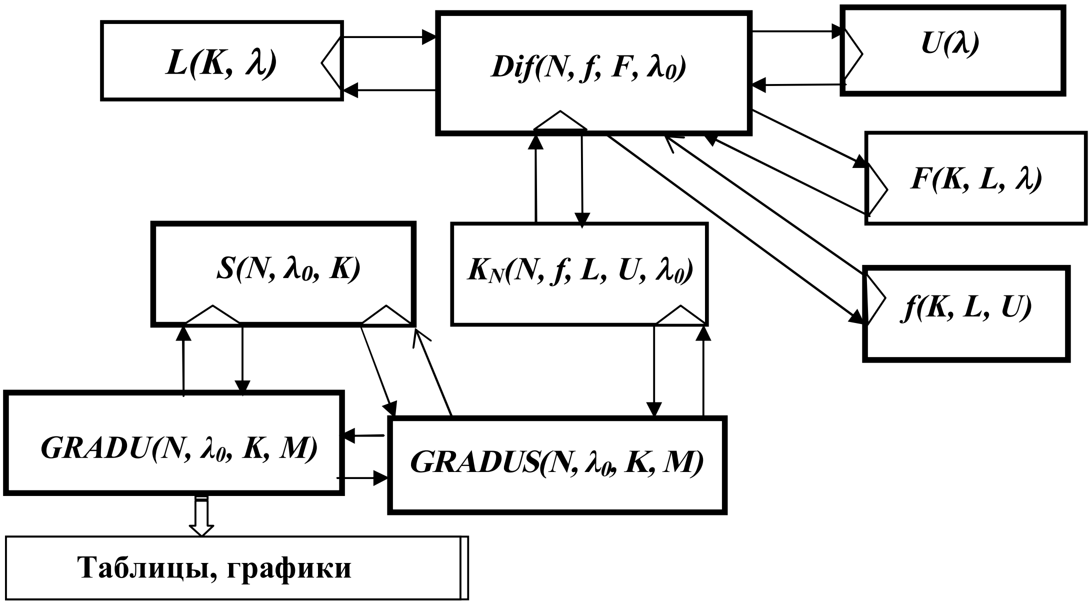


Рис. 2. Функциональная схема программы (направление потоков числовых данных): ***L(K, λ)*, *U(λ)* – управление; *Dif(N, f, F, λ₀)* – решение начальной задачи;** ***F(K, L, λ)*, *f(K, L)* – правые части дифференциальных уравнений;** ***K_N(N, f, L, U, λ_0)* – дискретная зависимость *K_N* от начальных данных;** ***S(N, λ_0, K_N)* – целевая функция; *GRADUS(N, λ_0, K, M)* – разностный градиент;** ***GRADU(N, λ_0, K, M)* – управляющая функция**

Результаты и их анализ

Результаты итерационного процесса представлены на рисунке 3. Основные исходные данные (в условных единицах): $K_1 = 4$; $T = 2$; $A = 0,9$; $\alpha = \beta = 0,5$.

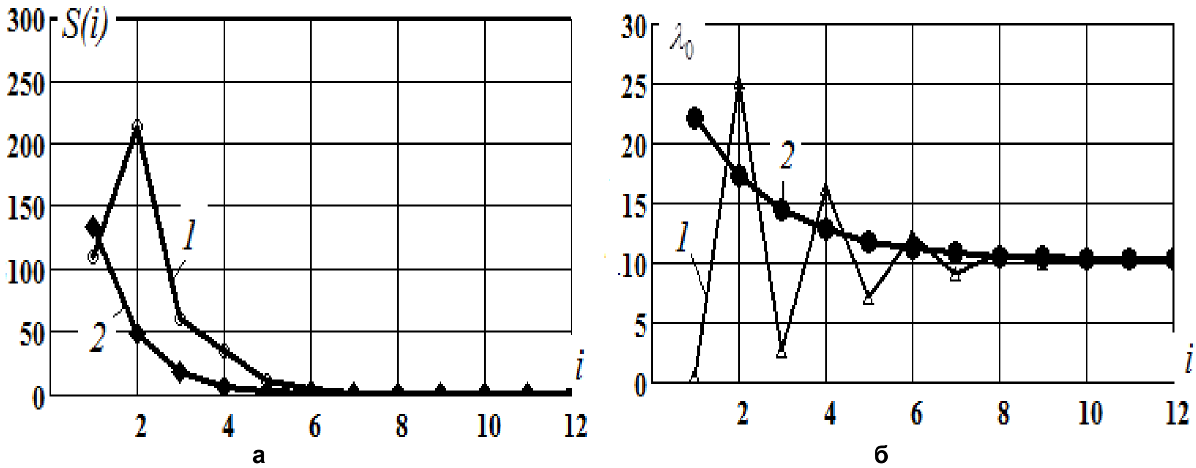


Рис. 3. Целевая функция (а) и начальное значение λ_0 (б) в итерационном процессе: 1) обычный метод градиентного спуска; 2) ускоренный метод градиентного спуска

Для обычного метода градиентного спуска приходится находить величину *h* по результатам анализа расчетов, многократно повторяя вычисления. При этом легко попасть в зону неустойчивости итерационного процесса (рис. 3, б). Метод ускоренного спуска позволяет определять оптимальное значение *h* в автоматическом режиме на каждом шаге итерационного процесса.

На рисунке 4 приводятся изменения управляющих параметров (*U, L*) и результат оптимального управления (*K*) по времени.

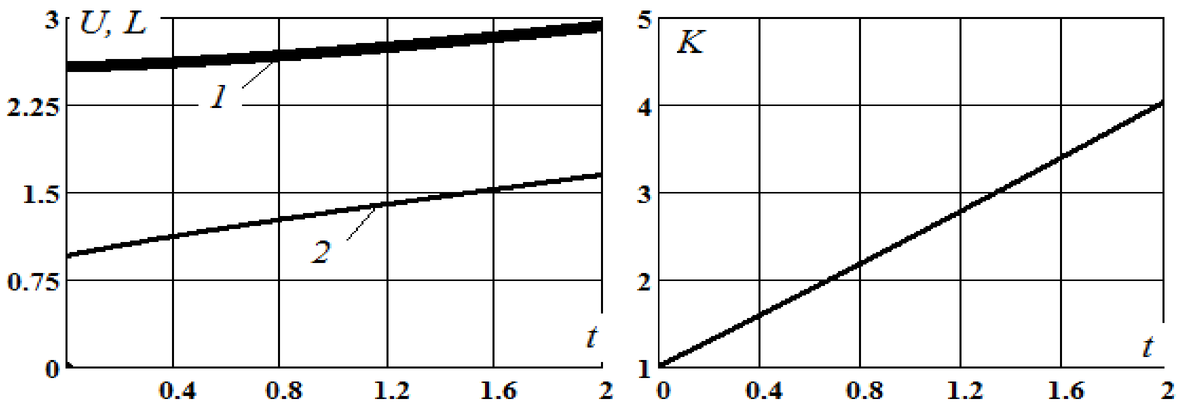


Рис. 4. Управляющие параметры (*1 – U*, *2 – L*) и результат управления (*K*)

Таким образом, применение метода ускоренного градиентного спуска привело к ускоренной сходимости. Необходимо отметить эффективность автоматического выбора параметра h на каждом шаге итераций для уменьшения объема вычислений.

Двухсекторная модель экономики

Общая схема финансовых потоков и управляющие параметры U, L представлены на рисунке 5.

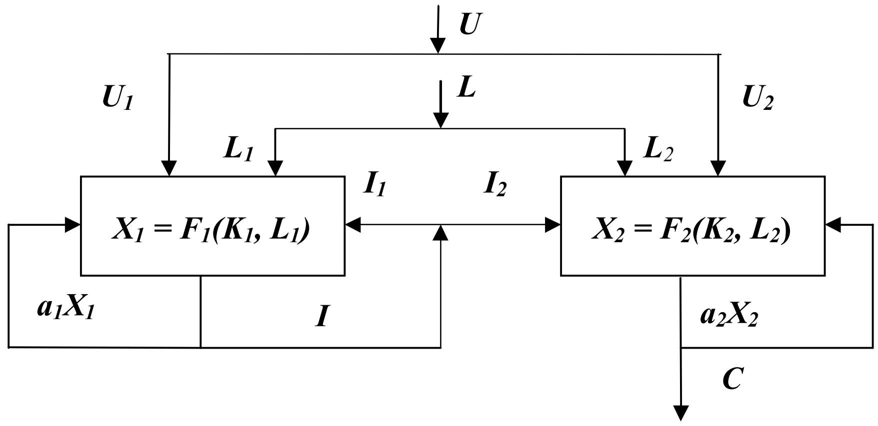


Рис. 5. Двухсекторная модель экономики

Приняты следующие обозначения переменных:

$K_i(t)$ – объемы основных фондов секторов;

$L_i(t)$ – трудовые ресурсы;

$U_i(t)$ – внешние инвестиции на обновление основных фондов (i = 1, 2).

Производственные функции принимаются в форме функций Кобба-Дугласа: $F_i(K_i, L_i) = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{\beta_i}$.

Приведем основные соотношения между управляющими переменными для каждого сектора [5, 10].

Инвестиции и трудовые ресурсы распределены по секторам выбором параметров ε и δ:

$$L = L_1 + L_2;\; I = I_1 + I_2;\; \varepsilon = \frac{L_1}{L_2};\; L_2 = \frac{L}{1+\varepsilon};\; L_1 = \frac{L\varepsilon}{1+\varepsilon};\; \delta = \frac{I_1}{I_2};\; I_2 = \frac{I}{1+\delta};\; I_1 = \frac{I\delta}{1+\delta};$$

$$X_1 = a_1 X_1 + I_1 + I_2;\;\; I = (1 - a_1) X_1 = \sigma X_1;\;\; U = U_1 + U_2 .$$

Здесь a_i – коэффициенты прямых затрат;

$\sigma = 1 - a_i$;

$\delta > 0$;

$\varepsilon > 0$.

Уравнения типа уравнений Солоу относительно основных фондов секторов, которые содержат управляющие переменные U(t) и L(t), с учетом заданного распределения трудовых ресурсов и внутренних инвестиций по секторам, предполагаются в виде:

$$\frac{d}{dt}K_1(t) = \sigma A_1\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)K_1(t)^{\alpha_1}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\beta_1}L(t)^{\beta_1} + \gamma_1 U(t) - \mu_1 K_1(t), \qquad (19)$$

$$\frac{d}{dt}K_2(t) = \sigma A_1\left(\frac{1}{1+\delta}\right)K_1(t)^{\alpha_1}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\beta_1}L(t)^{\beta_1} + \gamma_2 U(t) - \mu_2 K_2(t). \qquad (20)$$

Здесь $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ – постоянные.

Рассмотрим задачу поиска: найти такое управление $\{L = L(t),\ U = U(t)\}$, при котором за период времени [0; T] основные фонды секторов $K_1 = K_1(t)$ и $K_2 = K_2(t)$ вырастут от значений $K_1(0) = K_{10}$, $K_2(0) = K_{20}$, соответственно до заданных значений $K_1(T) = K_{11}$ и $K_2(T) = K_{21}$. При этом затраты на трудовые ресурсы и внедрение внешних инвестиций будут минимальными. Это означает, что интегральный функционал

$$V(L) = \int_0^T \left\{L(t)^2 + U(t)^2\right\}dt \qquad (21)$$

примет наименьшее значение.

Главным отличием от задачи, рассмотренной в работе [10], является совместное и раздельное управление по двум параметрам: трудовые ресурсы и внешние инвестиции.

Сформулированная задача – это задача вариационного исчисления на условный экстремум интегрального функционала. Для поиска решения задачи используются стандартные уравнения Эйлера [10, 13]. Расширенный функционал имеет вид

$$V^*\left(L, U, K_1, K_2, \lambda_1, \lambda_2, \frac{dK_1}{dt}, \frac{dK_2}{dt}\right) = \int_0^T\left(L^2 + U^2 + \lambda_1\left[\frac{dK_1}{dt} - \frac{\sigma A_1\delta}{1+\delta}K_1^{\alpha_1}L_1^{\beta_1} - \gamma_1 U + \mu_1 K_1\right]\right)dt +$$

$$+\int_0^T \lambda_2\left[\frac{dK_2}{dt} - \frac{\sigma A_1}{1+\delta}K_1^{\alpha_1}L_1^{\beta_1} - \gamma_2 U + \mu_2 K_2\right]dt. \qquad (22)$$

Здесь $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ – функции Лагранжа.

Запишем подробно подынтегральную функцию:

$$F^*\left(L(t), U(t), K_1(t), K_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \frac{dK_1}{dt}, \frac{dK_2}{dt}\right) = L(t)^2 + U(t)^2 +$$

$$+\lambda_1(t)\left[\frac{dK_1(t)}{dt} - \sigma A_1\frac{\delta}{1+\delta}K_1(t)^{\alpha_1}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\beta_1}L(t)^{\beta_1} - \gamma_1 U(t) + \mu_1 K_1(t)\right] +$$

$$+\lambda_2(t)\left[\frac{dK_2(t)}{dt} - \sigma A_1\frac{1}{1+\delta}K_1(t)^{\alpha_1}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\beta_1}L(t)^{\beta_1} - \gamma U(t) + \mu_2 K_2(t)\right]. \qquad (23)$$

Необходимые условия экстремума интегрального функционала (уравнения Эйлера) записываются в виде:

$$\frac{\partial F^*}{\partial L} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{L}}\right) = 0; \quad \frac{\partial F^*}{\partial U} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{U}}\right) = 0; \quad \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{\lambda}_1}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{\lambda}_2}\right) = 0; \quad \frac{\partial F^*}{\partial K_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{K}_1}\right) = 0; \quad \frac{\partial F^*}{\partial K_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{K}_2}\right) = 0.$$

Результатом частного дифференцирования функции (23) являются система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (26) – (29) и функциональные уравнения (24), (25):

$$2L-\lambda_1\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)\sigma A_1 K_1^{\alpha_1}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\beta_1}\beta_1 L^{\beta_1-1}-\lambda_2\left(\frac{1}{1+\delta}\right)\sigma A_1 K_1^{\alpha_1}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\beta_1}\beta_1 L^{\beta_1-1}=0\,; \quad (24)$$

$$2U-\gamma_1\lambda_1-\gamma_2\lambda_2=0\,; \quad (25)$$

$$\frac{dK_1}{dt}=\sigma A_1\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)K_1^{\alpha_1}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\beta_1}L^{\beta_1}+\gamma_1 U-\mu_1 K_1\,; \quad (26)$$

$$\frac{dK_2}{dt}=\sigma A_1\left(\frac{1}{1+\delta}\right)K_1^{\alpha_1}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\beta_1}L^{\beta_1}+\gamma_2 U-\mu_2 K_2\,; \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_1(t)=\lambda_1\left(-\left(\frac{\sigma A_1\delta}{1+\delta}\right)\alpha_1 K_1^{\alpha_1-1}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)L^{\beta_1}+\mu_1\right)-\lambda_2\left(\frac{\sigma A_1}{1+\delta}\right)\alpha_1 K_1^{\alpha_1-1}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)L^{\beta_1}\,; \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_2(t)=\lambda_2(t)\mu_2\,. \quad (29)$$

Из уравнений (24) и (25) найдем оптимальные зависимости управляющих функций $L(t)$ и $U(t)$ от остальных неизвестных функций:

$$L(t)=\left[\frac{1}{2(1+\delta)}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\beta_1}\sigma A_1 K_1^{\alpha_1}\beta_1\left(\delta\lambda_1(t)+\lambda_2(t)\right)\right]^{\frac{1}{2-\beta_1}}\,; \quad (30)$$

$$U(t)=0{,}5\left(\gamma_1\lambda_1(t)-\gamma_2\lambda_2(t)\right). \quad (31)$$

Для поиска оптимального решения введем функционал

$$U(\lambda_1(0),\lambda_2(0),K_1(t),K_2(t))=\omega_1\left(K_1(T)-K_{11}\right)^2+\omega_2\left(K_2(T)-K_{21}\right)^2. \quad (32)$$

Здесь ω_1 и ω_2 – весовые коэффициенты, устанавливающие приоритет параметров оптимизации. Функционал (32) характеризует отклонение расчетных значений основных фондов секторов в конечный момент времени от планируемых значений и определяется начальными значениями $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$.

Теперь задача формулируется следующим образом. Начальные значения $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ необходимо выбрать так, чтобы функционал (32) принимал наименьшее значение. Аналогичная задача с управлением только по трудовым ресурсам рассматривалась в работе [10].

Решение системы (24) – (29) при заданных начальных условиях находится одним из численных методов, например, методом Эйлера. Минимум функционала (32) необходимо находить методом разностного градиентного спуска на дискретном множестве функций, полученных численным методом. Для сравнения вычисления проводятся методом простого и ускоренного разностного градиентного спуска.

Рассмотрим подробно м*етод ускоренного градиентного спуска.* Численным методом получены сеточные функции $K_1=\{K_{10}, K_{11}, \ldots, K_{1N}\}$ и $K_2=\{K_{20}, K_{21}, \ldots, K_{2N}\}$, конечные значения которых заданы ($K_{1N}=K_{11}$, $K_{2N}=K_{21}$). Составляющие этих дискретных функций зависят от начальных значений функций Лагранжа. Проведем линеаризацию функций $K_{1N}\left(\lambda_{10}^i,\lambda_{20}^i\right)$ и $K_{2N}\left(\lambda_{10}^i,\lambda_{20}^i\right)$ на текущем итерационном шаге:

$$K_{1N}\left(\lambda_{10}^i,\lambda_{20}^i\right)=K_{1N}\left(\lambda_{10}^{i-1},\lambda_{20}^{i-1}\right)-h\left(\frac{\Delta K_{1N}}{\Delta\lambda_{10}}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta\lambda_{10}}+\frac{\Delta K_{1N}}{\Delta\lambda_{20}}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta\lambda_{20}}\right);$$

$$K_{2N}\left(\lambda_{10}^{i},\lambda_{20}^{i}\right)=K_{2N}\left(\lambda_{10}^{i-1},\lambda_{20}^{i-1}\right)-h\left(\frac{\Delta K_{2N}}{\Delta\lambda_{10}}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta\lambda_{10}}+\frac{\Delta K_{2N}}{\Delta\lambda_{20}}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta\lambda_{20}}\right).$$

После подстановки полученных выражений в целевой функционал (32), который аппроксимирован на дискретном множестве, приходим к функции одной переменной – параметра h, определяющего шаг итерационного процесса

$$\varphi(h)=S\left(\lambda_{10}^{i},\lambda_{20}^{i}\right)=\omega_1\left[K_{1N}\left(\lambda_{10}^{i-1},\lambda_{20}^{i-1}\right)-\overline{K}_{11}-h\left(\frac{\Delta K_{1N}}{\Delta\lambda_{10}}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta\lambda_{10}}+\frac{\Delta K_{1N}}{\Delta\lambda_{20}}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta\lambda_{20}}\right)\right]^2+$$

$$+\omega_1\left[K_{2N}\left(\lambda_{10}^{i-1},\lambda_{20}^{i-1}\right)-\overline{K}_{21}-h\left(\frac{\Delta K_{2N}}{\Delta\lambda_{10}}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta\lambda_{10}}+\frac{\Delta K_{2N}}{\Delta\lambda_{20}}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta\lambda_{20}}\right)\right]^2.$$

Из условия $\varphi'(h)=\dfrac{d\varphi}{dh}=0$ получаем значение h

$$h=\frac{\omega_1\left(K_{1N}-\overline{K}_{11}\right)\sum_{i=1}^{2}\frac{\Delta K_{1N}}{\Delta\lambda_{i0}}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta\lambda_{i0}}+\omega_2\left(K_{2N}-K_{21}\right)\sum_{i=1}^{2}\frac{\Delta K_{2N}}{\Delta\lambda_{i0}}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta\lambda_{i0}}}{\omega_1\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\Delta K_{1N}}{\Delta\lambda_{i0}}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta\lambda_{i0}}\right)^2+\omega_2\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\Delta K_{2N}}{\Delta\lambda_{i0}}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta\lambda_{i0}}\right)^2}. \qquad (33)$$

В приведенных формулах и окончательной формуле (33) частные производные заменены разностными отношениями. Функциональная схема компьютерной программы приведена на рисунке 6.

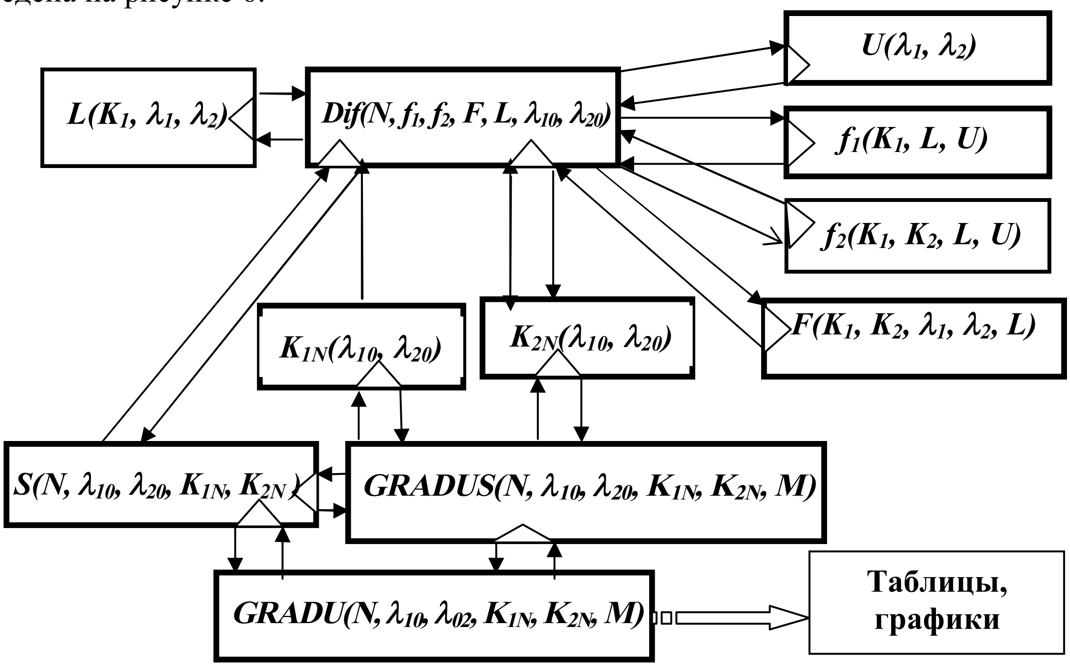


Рис. 6. Функциональная схема программы

Приведем основные функциональные блоки программы в системе Mathcad и их назначение:

$L(K_1,\lambda_1,\lambda_2)$ – оптимальная зависимость трудовых ресурсов;

$U(\lambda_1,\lambda_2)$ – оптимальное значение внешних инвестиций;

$Dif(N,f_1,f_2,F,\lambda_{10},\lambda_{20})$ – численное решение начальной задачи;

$f_1(K_1,L,U)$ – правая часть уравнения (26);

$f_2(K_1,K_2,L,U)$ – правая часть уравнения (27);

$F(K_1,K_2,\lambda_1,\lambda_2,L)$ – правая часть уравнения (28);

$S(N,\lambda_{10},\lambda_{20},K_{1N},K_{2N})$ – целевая функция;

$K_{1N}(\lambda_{10},\lambda_{20}),\ K_{2N}(\lambda_{10},\lambda_{20})$ – зависимости основных фондов от начальных значений функций Лагранжа;

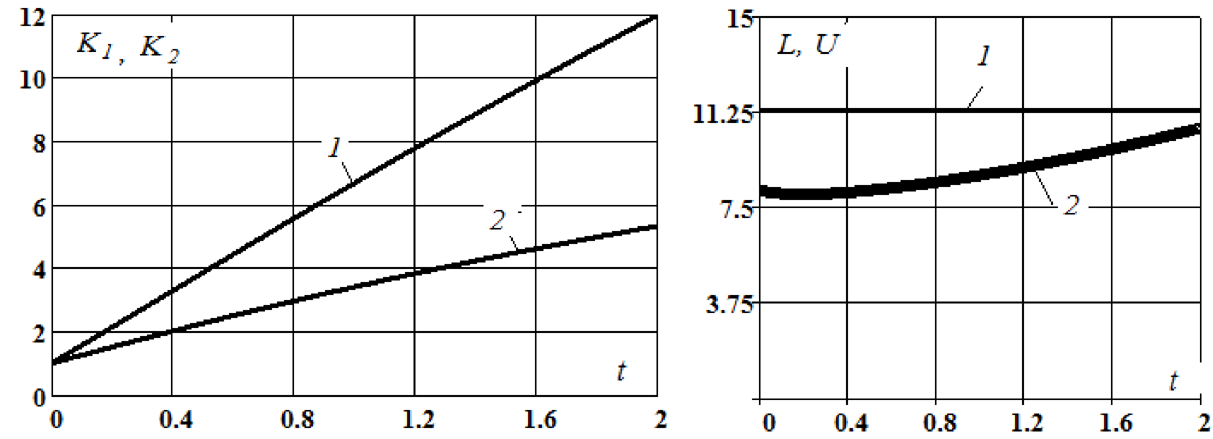
$GRADUS(N,\lambda_{10},\lambda_{20},K_{1N},K_{2N},M)$ – вычисление координат разностного градиента в текущей точке, оптимального значения параметра h и координат новой точки;

$GRADU(N,\lambda_{10},\lambda_{20},K_{1N},K_{2N},M)$ – управление вычислениями.

При тестировании приведенного алгоритма использовался широкий диапазон значений параметров производственных функций в условиях фиксированного распределения трудовых ресурсов и внешних инвестиций.

В качестве исходных данных использовались значения параметров (в условных единицах): $\alpha_1 = 0,1$; $\alpha_2 = 0,9$; $\beta_1 = 0,9$; $\beta_2 = 0,1$; $K_{11} = 12$; $K_{21} = 5$.

На рисунке 7 представлен график изменения основных фондов секторов и управления в течение заданного промежутка времени. Управление осуществлялось только с помощью внешних инвестиций. Отметим, что цель управления достигается с некоторой допустимой погрешностью.



а б

Рис. 7. Конечный результат и управление только по *U*: а) 1 – K1; 2 – K2; б) 1 – L; 2 – U

На рисунке 8 представлена целевая функция в итерационном процессе при ускоренном и простом методах градиентного спуска.

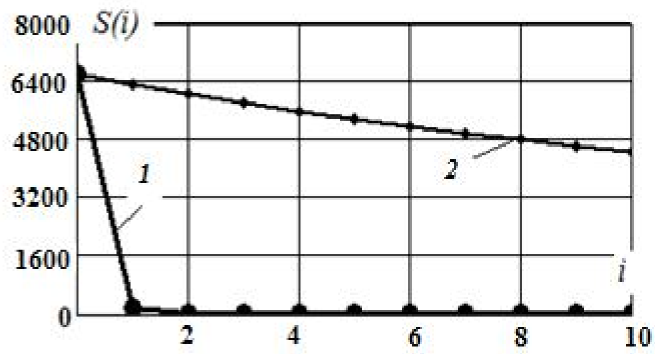


Рис. 8. Целевые функции в итерационном процессе:
1 – метод ускоренного спуска; 2 –простой градиентный метод

Целевые функции, представленные на рисунке 8, демонстрируют основное преимущество метода ускоренного градиентного спуска – уменьшение числа итераций, то есть повышение экономичности вычислительного алгоритма.

Следует отметить, что достижение высокой точности ($K_{2N} = K_2(2) \neq K_{21}$) не всегда представляется возможным (рис. 7, а). Высокая точность обеспечивается, если целью является достижение заданного конечного значения объемов основных фондов только одного сектора. Одновременная оптимизация по двум критериям приводит к снижению точности.

При решении задач итерационными методами одним из решающих факторов можно считать стабильность результатов. Это означает, что небольшие отклонения от начальных значений искомых функций не должны приводить к существенному изменению конечного результата. Применение метода градиентного ускоренного спуска повышает стабильность полученных результатов.

Задачи оптимального управления необходимо рассматривать с учетом ограниченности трудовых ресурсов и внешних инвестиций. Эффективность ресурсов определяется предварительными расчетами при наличии оценок основных параметров производственных функций. В представленных задачах явно не записаны ограничения на искомые функции. Эти ограничения проверяются по результатам расчетов.

Выводы

1. Сформулированы задачи оптимального управления по двум переменным для односекторной и двухсекторной моделей экономики при заданных начальных и конечных значениях основных фондов. Предложены методы приближенного решения задач такого типа.

2. Проведено сравнение методов разностного градиентного спуска на примерах задач оптимального управления односекторной и двухсекторной экономикой. В качестве управляющих переменных рассматривались трудовые ресурсы и внешние инвестиции на обновление основных фондов секторов.

3. Для поиска минимума целевой функции реализован метод ускоренного градиентного спуска, в котором при каждой итерации шаг процесса согласуется с результатом решения системы дифференциальных уравнений численным методом. Метод проверен на конкретных задачах и показано его преимущество относительно вычислительной экономичности и скорости сходимости по сравнению с обычным методом.

4. Разработана компьютерная программа в системе Mathcad, в которой реализован алгоритм ускоренного разностного градиентного спуска для поиска минимума целевого функционала. Программа адаптирована к задачам односекторной и двухсекторной экономики. Тестирование программы проведено в широком диапазоне основных параметров производственных функций.

Библиографический список

1. Данилов Н.Н. Курс математической экономики : учеб. пособие / Н.Н. Данилов. – Москва : Высшая школа, 2006. – 407 с.
2. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики : учебник для вузов / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – Москва : Наука, 1970. – 664 с.
3. Замков О.О. Математические методы в экономике : учебник / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных ; под общ. ред. д-ра экон. наук, проф. А.В. Сидоровича. – 4-е изд., стереотип. – Москва : Изд-во «Дело и Сервис», 2004. – 384 с.
4. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – Москва : Финансы и статистика, 1986. – 240 с.
5. Колемаев В.А. Математическая экономика : учебник для вузов / В.А. Колемаев. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 399 с.
6. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Н.Ш. Кремер. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 479 с.
7. Мажукин В.И. Математическое моделирование в экономике : учеб. пособие : в 3-х ч. Ч. 3. Экономические приложения / В.И. Мажукин, О.Н. Королева. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Флинта : Моск. психол.-социол. ин-т, 2005. – 174 с.
8. Математическая экономика на персональном компьютере ; под ред. М. Кубонива. – Москва : ФиС, 1991. – 304 с.
9. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad : учеб. пособие / В.А. Охорзин. – 2-е изд., исп. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 352 с.
10. Слиденко А.М. Численно-функциональный метод поиска оптимального управления двухсекторной экономикой / А.М. Слиденко // Современные тенденции развития науки и технологий : периодический научный сборник по материалам Международной науч.-практ. конф., г. Белгород, 30 сентября 2016 г. – 2016. – № 9–4. – С. 107–112.
11. Терновых К.С. Сравнительный анализ показателей эффективности деятельности сельскохозяйственных предприятий на основе модели двухсекторной экономики / К.С. Терновых, А.М. Слиденко, Д.В. Чернов // Вестник Воронежского государственного аграрного университета. – 2010. – № 3 (26). – С. 79–84.
12. Токарев В.В. Методы оптимальных решений : учеб. пособие / В.В. Токарев. – 2-е изд., испр. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 420 с.
13. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – Москва : Наука, 1969. – 424 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
Принадлежность к организации

Александр Михайлович Слиденко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономического анализа, статистики и прикладной математики ФГБОУ ВО «Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I», г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: alexandr.slidenko@yandex.ru.

Елена Анатольевна Агапова – кандидат экономических наук, доцент кафедры экономического анализа, статистики и прикладной математики ФГБОУ ВО «Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I», г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: elenagapova603@mail.ru.

Дата поступления в редакцию 06.08.2018 Дата принятия к печати 03.09.2018

AUTHOR CREDENTIALS
Affiliations

Alexandr M. Slidenko – Candidate of Physics-math. Sciences, Docent, the Dept. of Economic Analysis, Statistics and Applied Mathematics, Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter the Great, Russian Federation, Voronezh, e-mail: alexandr.slidenko@yandex.ru.

Elena A. Agapova – Candidate of Economic Sciences, Docent, the Dept. of Economic Analysis, Statistics and Applied Mathematics, Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter the Great, Russian Federation, Voronezh, e-mail: elenagapova603@mail.ru.

Received August 06, 2018 Accepted September 03, 2018