

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИКОЙ ПРЕДПРИЯТИЯ

Александр Михайлович Слиденко¹
Елена Анатольевна Агапова²

¹Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I

²Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Представлены формулировки и методы приближенного решения задач оптимизации микроэкономической системы – предприятия сельскохозяйственного типа. Экономика предприятия представлена в форме двух-секторной математической модели. Для решения задач оптимизации предлагаются итерационные методы на основе градиентных методов. При решении задач оптимального управления используется принцип максимума Понтрягина. Целью работы является сравнение итерационных алгоритмов решения задач оптимизации и выбор наиболее эффективных. В качестве примера формулируется задача оптимального управления экономикой предприятия сельскохозяйственного типа. Экономика предприятия представлена в виде двух взаимодействующих секторов, то есть используется двухсекторная модель. Предлагается проводить два этапа оптимизации экономики предприятия: первый этап – начальная оценка оптимального распределения трудовых ресурсов и внутренних инвестиций по секторам для обеспечения планируемой траектории роста основных фондов секторов (или объема произведенной продукции), второй – формулировка задачи оптимального управления с фиксированными начальными и конечными значениями основных параметров. В качестве управляющих параметров предложено использовать трудовые ресурсы и внешние инвестиции. Задача на условный экстремум интегрального функционала решается с помощью функции Гамильтона. С использованием статистических данных найдены оценки параметров производственных функций, которые предполагаются степенными (т. е. функциями типа Кобба-Дугласа). Разработан алгоритм метода ускоренного спуска с оптимальным выбором шага в итерационном процессе, показана эффективность метода ускоренного спуска для поиска минимума специально введенной целевой функции для задач первого и второго этапа оптимизации. Предложенные методы оптимизации в сочетании с методами ускоренного градиентного спуска реализованы в системе Mathcad с целевыми функциями различного типа.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: экономика предприятия, двухсекторная модель, производственная функция, инвестиции, оптимальное управление, функция Гамильтона, итерационный процесс.

NUMERICAL ALGORITHMS FOR OPTIMIZATION OF MANAGEMENT MODELS OF ENTERPRISE ECONOMICS

Alexandr M. Slidenko¹
Elena A. Agapova²

¹Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter the Great

²Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

The article presents the formulations and methods for approximate solving problems of microeconomic system optimization – agricultural enterprises. The enterprise economy is presented in the form of a two-sector mathematical model. Iterative methods based on gradient methods are proposed for solving optimization problems. Pontryagin's maximum principle is used to solve optimal control problems. The aim of the work is to compare the iterative algorithms for solving optimization problems and select the most efficient ones. As an example, the task of optimal management of an agricultural enterprise is formulated. The enterprise economy is represented in the form of two interacting sectors, that is, a two-sector model is used. It is proposed to carry out two stages of the enterprise economy optimization. The first stage of optimization is that in order to ensure the planned growth trajectory of the fixed assets of the sectors (or the volume of output), an initial assessment of the optimal distribution of labor resources and domestic investment by sectors is carried out. The second stage of optimization consists in the formulation of an optimal control problem with fixed initial and final values of the main parameters. It is proposed to use labor resources and external investments as control parameters. The problem of the conditional extremum of an integral functional is solved using the Hamilton function. Using statistical data, estimates of the parameters of production functions that are assumed to be power-law (that is, Cobb-Douglas-type functions) are found. The algorithm of the method of accelerated descent with the optimal choice of step in

the iterative process was developed. The effectiveness of the accelerated descent method for finding the minimum of a specially introduced objective function for the problems of the first and second optimization stages is shown. The proposed optimization methods in combination with the methods of accelerated gradient descent are implemented in the Mathcad system with objective functions of various types.

KEYWORDS: enterprise economy, two-sector model, production function, investment, optimal control, Hamilton function, iterative process.

Введение

В работах В.А. Колемаева [7], В.А. Охорзина [9] и ряда других авторов [3, 16, 21, 26] изучаются секторные модели микроэкономических систем и методы оптимального управления такими системами. В этих моделях дифференциальные уравнения относительно основных фондов записываются в форме, предложенной Солоу [25]. Производственные функции часто имеют вид степенных функций Кобба-Дугласа [16]. Исследованию экономических систем методом производственных функций посвящены работы [1–4, 18–20, 24–26]. Особое внимание уделяется методам оценки параметров производственных функций по статистическим данным. Главное требование, которое сложно обеспечить, заключается в однородности используемых статистических выборок. Наличие выборок небольшого объема, в силу длительного производственного цикла предприятий сельскохозяйственного типа, предполагает проведение подробного статистического анализа данных для получения оценок параметров производственных функций. В работах [3, 4, 6–12] используются данные для однотипных предприятий, например фермерских хозяйств определенного региона за короткий временной период (3–4 года).

Практическое исследование таких моделей стало возможным и эффективным с появлением мощных вычислительных систем и доступного программного обеспечения. Применение численных методов предполагает проведение исследований свойств алгоритмов оптимизации на практических примерах.

В работах [7, 9, 10–12] исследовались методы оптимизации с помощью фиксированного распределения трудовых ресурсов и внутренних инвестиций по секторам для двухсекторной и трехсекторной моделей экономики. Оптимальное распределение ресурсов обеспечивает траекторию роста основных фондов или объема выпуска продукции, близкой к заданной. Следует отметить, что задачи подобного типа можно считать первым этапом оптимизации, так как в них оцениваются диапазоны допустимых значений параметров для корректной постановки задач оптимального управления. Эти диапазоны зависят от эффективности производственных функций, то есть от рациональной организации производства, а также от производственной мощности конкретного предприятия.

В предложенной работе авторы рассматривают два основных этапа оптимизации на примере предприятия сельскохозяйственного типа. Первый этап заключается в выборе распределения инвестиций и трудовых ресурсов по секторам, обеспечивающих рост основных параметров, близкий к заданной динамике роста. Второй этап заключается в постановке и решении конкретных задач оптимального управления.

Применение численных методов для решения начальных задач с нелинейными системами дифференциальных уравнений, или уравнений с запаздывающим аргументом, предполагает получение решения в виде дискретных функций, определенных на дискретном множестве. По этой причине целевая функция (функция дискретного аргумента) минимизируется с помощью метода, аналогичного методу градиентного спуска [5, 11–14], в котором частные производные аппроксимируются, с приемлемой точностью, разностными отношениями. В предложенной работе проводится сравнение методов простого спуска (с фиксированным шагом) и ускоренного спуска (с оптимальным шагом). Показаны преимущества метода разностного ускоренного спуска.

В задачах оптимального управления используется необходимое условие экстремума в форме принципа максимума Понтрягина. На примере двухсекторной модели экономики найдены соотношения между параметрами, которые обеспечивают выполнение достаточных условий максимума функции Гамильтона. Выполнение этих условий подтверждается численными расчетами.

С использованием статистических оценок параметров производственных функций проведены численные эксперименты. Получены зависимости параметров управления от времени.

1. Математическая модель

Для примера рассматривается модель экономики, аналогичная модели, предложенной в работах [10, 12]. В представленной модели дополнительно учитываются внешние инвестиции, направленные на развитие основных фондов секторов предприятия. Приведем коротко описание этой модели, следуя [10]. Схема финансовых и материальных потоков представлена на рисунке 1.

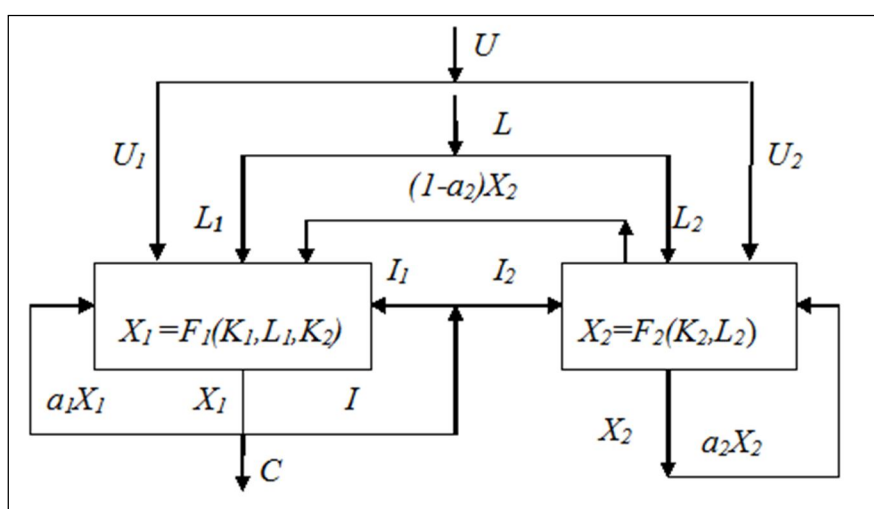


Рис. 1. Схема финансовых и материальных потоков

На приведенной схеме $F_1(K_1, L_1, K_2)$ и $F_2(K_2, L_2)$ – производственные функции секторов.

В работе [12] предложена модель экономики предприятия сельскохозяйственного типа, состоящая из двух секторов: основного (технического) и вспомогательного (земельного). Главные финансы сосредоточены в техническом секторе, причем земельный фонд также является ресурсом этого сектора.

Особенность предприятия сельскохозяйственного типа состоит в том, что земельный фонд участвует как фактор производства в первом и втором секторе. По этой причине производственная функция технического сектора в качестве аргумента содержит также объем земельных ресурсов, то есть в модели это функция трех переменных. В модели учитывается необходимость инвестиций для восстановления продуктивности земельного фонда. Для производственных функций такой модели в [10] получены оценки основных параметров, которые используются в вычислительном эксперименте.

Рассмотрим основные переменные и уравнения, их связывающие.

Распределение внутренних инвестиций и трудовых ресурсов по секторам определяется уравнениями:

$$L(t) = L_1(t) + L_2(t); \quad \varepsilon = \frac{L_1(t)}{L_2(t)}; \quad L_2(t) = \frac{L(t)}{1 + \varepsilon}; \quad L_1(t) = \frac{L(t)\varepsilon}{1 + \varepsilon}; \quad (1)$$

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t); \quad \delta = \frac{I_1(t)}{I_2(t)}; \quad I_2 = \frac{I(t)}{1 + \delta}; \quad I_1 = \frac{I(t)\delta}{1 + \delta}. \quad (2)$$

Производственные функции первого и второго секторов рассматривались соответственно как функции двух и трех переменных:

$$F_1(K_1, L_1, K_2); \quad F_2(K_2, L_2). \quad (3)$$

Распределение объемов продукции первого сектора, в соответствии со схемой (рис. 1), определяется соотношением

$$X_1(t) = a_1 X_1(t) + I_1(t) + I_2(t) + C(t), \quad (4)$$

откуда следует

$$I(t) = (1 - a_1) X_1(t) - C(t) = \sigma_1 X_1(t) - \sigma_2 X_1(t) = \sigma X_1(t), \quad (5)$$

где $C(t) = \sigma_2 X_1(t)$,

$$\sigma = \sigma_1 - \sigma_2.$$

При наличии внешних инвестиций $U(t) = U_1(t) + U_2(t)$ дифференциальные уравнения (типа уравнений Солоу) относительно основных фондов секторов предлагается рассматривать в виде:

$$\frac{d}{dt} K_1(t) = \left(\frac{\delta}{1 + \delta} \right) \sigma F_1(K_1(t), L_1(t), K_2(t)) + \gamma_1 U(t) - \mu_1 K_1(t), \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} K_2(t) = \left(\frac{\sigma}{1 + \delta} \right) F_1(K_1(t), L_1(t), K_2(t)) + \gamma_2 U(t) - \mu_2 K_2(t). \quad (7)$$

Приведем обозначения основных характеристик первого и второго сектора:

$X_i(t)$ – объемы выпуска продукции;

$K_i(t)$ – основные фонды;

$L_i(t)$ – трудовые ресурсы;

$I_i(t)$ – внутренние инвестиции;

$U(t)$ – внешние инвестиции;

μ_i, γ_i – положительные постоянные, характеризующие темп убытия основных фондов и эффективность внешних инвестиций;

a_i – коэффициенты прямых затрат ($i = 1, 2$);

C – объем реализованной продукции первого сектора,

t – время.

2. Алгоритмы оптимизации

2.1. Рациональное распределение ресурсов

На первом этапе оцениваются значения ε и δ (фиксированное распределение ресурсов по секторам), которые обеспечивают траекторию роста основных фондов или объема выпускаемой продукции, близкую к заданной. На рисунке 2 представлены планируемая $X_1^*(t_i)$ и расчетная $X_1(t_i)$ траектории изменения величин.

Близость этих кривых характеризует функция

$$S(\varepsilon, \delta) = \omega \sum_{i=0}^m (X_{1i}^* - X_1(t_i))^2, \quad (8)$$

где ω – весовой коэффициент.

Величина $X_1(t_i)$ определяется по формуле

$$X_1(t_i) = F_1(K_1(t_i), L(t_i), K_2(t_i)).$$

Таким образом, формулируется задача: найти такое решение системы (1) – (7) с заданными начальными условиями, при котором функция (8) принимает наименьшее значение.

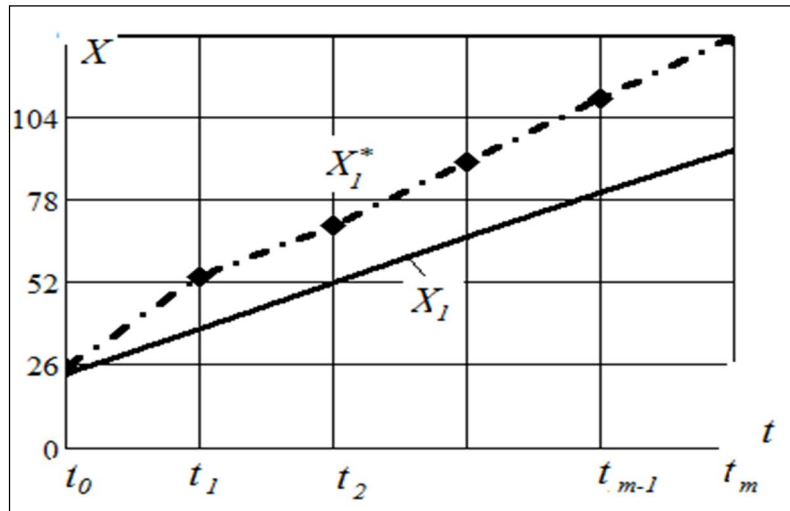


Рис. 2. Планируемые $X_1^*(t_i)$ и расчетные $X_1(t_i)$ значения величин

Приближенное решение этой задачи находится методом градиентного спуска, то есть итерационный процесс имеет, например, следующий вид:

$$\delta_i = \delta_{i-1} - h \cdot \frac{\Delta_\delta S(\varepsilon_{i-1}, \delta_{i-1})}{\Delta \delta}; \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} - h \cdot \frac{\Delta_\varepsilon S(\varepsilon_{i-1}, \delta_{i-1})}{\Delta \varepsilon}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

где $\frac{\Delta_\delta S(\varepsilon_{i-1}, \delta_{i-1})}{\Delta \delta}$, $\frac{\Delta_\varepsilon S(\varepsilon_{i-1}, \delta_{i-1})}{\Delta \varepsilon}$ – разностные отношения, аппроксимирующие частные производные;

h – параметр, определяющий шаг итерационного процесса (может выбираться оптимальным на каждом шаге итерационного процесса).

Аналогично формулируются задачи относительно обеспечения планируемого роста основных фондов секторов.

2.2. Второй этап оптимизации

Обеспечение трудовых ресурсов и внедрение внешних инвестиций требуют затрат, значения которых можно определить в виде квадратичного интегрального функционала

$$V(L, U) = \int_0^T [L(t)^2 + U(t)^2] dt. \quad (10)$$

Приведем примеры рассмотренных задач оптимального управления.

Задача 1. Необходимо определить управление $\{L(t), U(t)\}$, которое обеспечивает рост объема производства первого сектора за период времени $[0, T]$ от значения $X_{10} = X_1(0)$ до значения $\bar{X}_1 = X_1(T)$ при минимальных затратах на содержание трудовых ресурсов и внедрение внешних инвестиций (10).

Объем производства первого сектора $X_1(t)$ определяется по формуле

$$X_1(t) = F_1(K_1(t), L_1(t), K_2(t)). \quad (11)$$

В формулах (10), (11) функции $K_1(t)$, $K_2(t)$, $L(t)$, $U(t)$ удовлетворяют системе (1) – (7) и краевым условиям: $K_1(0) = \bar{K}_1$; $K_2(0) = \bar{K}_2$; $X_1(T) = \bar{X}_1$.

Задача 2. Необходимо определить управление $\{L(t), U(t)\}$, которое обеспечивает рост основных фондов за период времени $[0, T]$ первого и второго сектора от значений $K_{10} = K_1(0)$, $K_{20} = K_2(0)$ соответственно до значений $\bar{K}_1 = K_1(T)$ и $\bar{K}_2 = K_2(T)$ при минимальных затратах на содержание трудовых ресурсов и внедрение внешних инвестиций (10).

Поиск решения приведенных задач на условный минимум интегрального функционала (10) будем осуществлять в форме условий Гамильтона-Якоби (уравнений Эйлера в канонической форме) [9, 14]. Такая форма позволяет исследовать сформулированные задачи также с применением принципа максимума Понтрягина.

Введем обозначения правых частей дифференциальных уравнений:

$$f_1(K_1, K_2, L, U) = \frac{\delta}{1 + \delta} \sigma F_1(K_1(t), L(t), K_2(t)) + \gamma_1 U(t) - \mu_1 K_1(t), \quad (12)$$

$$f_2(K_1, K_2, L, U) = \frac{1}{1 + \delta} \sigma F_1(K_1(t), L(t), K_2(t)) + \gamma_2 U(t) - \mu_2 K_2(t), \quad (13)$$

$$f_0(L, U) = L(t)^2 + U(t)^2. \quad (14)$$

Систему ограничений запишем в виде:

$$\frac{dK_1(t)}{dt} = f_1(K_1, K_2, L, U), \quad (15)$$

$$\frac{dK_2(t)}{dt} = f_2(K_1, K_2, L, U), \quad (16)$$

$$\frac{dK_0(t)}{dt} = f_0(L, U). \quad (17)$$

Дополнительная переменная $K_0(t)$ определяется по формуле

$$K_0(t) = \int_0^t f_0(L(\tau), U(\tau)) d\tau,$$

откуда следует равенство $K_0(0) = \int_0^0 f_0(L(\tau), U(\tau)) d\tau = 0$.

Вводим вектор сопряженных переменных $p = (p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ и принимаем $p_0(t) = -1$. Составляем функцию Гамильтона

$$H(K_1, K_2, L, U, p_1, p_2) = -f_0(L, U) + p_1 f_1(K_1, K_2, L, U) + p_2 f_2(K_1, K_2, L, U). \quad (18)$$

Система уравнений Гамильтона-Якоби, дополненная условиями стационарности гамильтониана, имеет вид:

$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dK_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad (19)$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial K_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial K_2}, \quad \frac{dp_0}{dt} = 0 = -\frac{\partial H}{\partial K_0}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial H}{\partial L} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial U} = 0. \quad (21)$$

Запишем систему уравнений в явном виде, вычислив частные производные:

$$-\frac{\partial f_0}{\partial L} + p_1 \frac{\partial F_1}{\partial L} + p_2 \frac{\partial F_1}{\partial L} = 0, \quad (22)$$

$$-\frac{\partial f_0}{\partial U} + \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt}K_1(t) = \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)\sigma F_1(K_1(t), L(t), K_2(t)) + \gamma_1 U(t) - \mu_1 K_1(t), \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt}K_2(t) = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)\sigma F_1(K_1(t), L(t), K_2(t)) + \gamma_2 U(t) - \mu_2 K_2(t), \quad (25)$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\sigma}{1+\delta} \cdot \frac{\partial F_1(K_1, L, K_2)}{\partial K_1} (\delta p_1(t) + p_2(t)) + \mu_1 p_1(t), \quad (26)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\sigma}{1+\delta} \frac{\partial F_1(K_1, L, K_2)}{\partial K_2} (\delta p_1(t) + p_2(t)) + \mu_2 p_2(t). \quad (27)$$

Проведем анализ выполнения достаточных условий максимума функции Гамильтона (18).

При каждом фиксированном t это функция двух независимых переменных U и L :

$$H(L, U) = -L^2 - U^2 + p_1 \left(\frac{\delta}{1+\delta} \sigma F_1(K_1, L, K_2) + \gamma_1 U - \mu_1 K_1 \right) + \\ + p_2 \left(\frac{\sigma}{1+\delta} F_1(K_1, L, K_2) + \gamma_2 U - \mu_2 K_2 \right).$$

Частные производные первого и второго порядков имеют вид:

$$\frac{\partial H}{\partial U} = -2U + p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial U^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial L \partial U} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial L} = -2L + \frac{\sigma}{1+\delta} (p_1 \delta + p_2) \frac{\partial F_1}{\partial L}(K_1, L, K_2),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial L^2} = -2 + \frac{\sigma}{1+\delta} (p_1 \delta + p_2) \frac{\partial^2 F_1}{\partial L^2}(K_1, L, K_2).$$

При условиях $p_1 \delta + p_2 > 0$ и $\frac{\partial^2 H}{\partial L^2} < 0$, с учетом $\frac{\partial^2 H}{\partial U^2} = -2$, $\frac{\partial^2 H}{\partial L \partial U} = 0$, получаем

$$\Delta = \frac{\partial^2 H}{\partial L^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial U^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial L \partial U} > 0.$$

Определенные условия при каждом t обеспечивают максимум функции Гамильтона.

Для поиска приближенного решения системы уравнений (22) – (27) с условиями

$$K_1(0) = \bar{K}_1, \quad K_2(0) = \bar{K}_2, \quad X_1(T) = \bar{X}_1$$

применяется квадратичный функционал

$$S(p_1(0), p_2(0), K_1(t), K_2(t), X_1(t)) = \omega (X_1(T) - \bar{X}_1)^2. \quad (28)$$

Для поиска приближенного решения системы уравнений (22) – (27) с условиями

$$K_1(0) = K_{10}, \quad K_2(0) = K_{20}, \quad K_1(T) = \bar{K}_1, \quad K_2(T) = \bar{K}_2$$

функционал имеет более сложный вид

$$S(p_1(0), p_2(0), K_1(t), K_2(t), X_1(t)) = \omega_1 (K_1(T) - \bar{K}_1)^2 + \omega_2 (K_2(T) - \bar{K}_2)^2. \quad (29)$$

Выбор весовых коэффициентов ω , ω_1 и ω_2 определяется содержанием задачи оптимального управления.

Для введенных функционалов задачи оптимизации 1 и 2 будут формулироваться следующим образом: *необходимо найти такие начальные значения сопряженных переменных $p_1(0)$ и $p_2(0)$, при которых функционал (28) (задача 1) или (29) (задача 2) принимает наименьшее значение.*

Применение аналитических методов для поиска точных решений сформулированных задач является проблематичным, поэтому для поиска приближенных решений применяются численные методы.

2.3. Метод разностного градиентного спуска

Приближенное решение системы уравнений (22) – (27) при заданных краевых условиях находится одним из численных методов (например, методом Рунге-Кутты или методом Эйлера). Минимум функционалов (28), (29) необходимо искать на множестве дискретных функций. Для этой цели применяются методы разностного градиентного спуска.

Рассмотрим подробно метод ускоренного спуска для поиска приближенного решения более сложной задачи 2 (для задачи 1 этот метод применяется аналогично).

Численным методом получены сеточные функции:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{K_{10}, K_{11}, \dots, K_{1N}\}, \\ K_2 &= \{K_{20}, K_{21}, \dots, K_{2N}\}. \end{aligned}$$

Составляющие этих функций зависят от начальных значений сопряженных переменных, в частности $K_{1N}(p_{10}^i, p_{20}^i)$ и $K_{2N}(p_{10}^i, p_{20}^i)$ (здесь i – номер итерации).

Итерационный процесс метода разностного градиентного спуска применялся в виде:

$$p_{10}^i = p_{10}^{i-1} - h \frac{\Delta_1 S(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}, K_{1N}, K_{2N})}{\Delta p_{10}}, \quad (30)$$

$$p_{20}^i = p_{20}^{i-1} - h \frac{\Delta_2 S(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}, K_{1N}, K_{2N})}{\Delta p_{20}}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (31)$$

В приведенных формулах приняты следующие обозначения приращений дискретных функций и их аргументов:

$$\begin{aligned} \Delta_1 S(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}, K_{1N}, K_{2N}) &= S(p_{10}^{i-1} + \Delta p_{10}, p_{20}^{i-1}, K_{1N}, K_{2N}) - S(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}, K_{1N}, K_{2N}), \\ \Delta_2 S(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}, K_{1N}, K_{2N}) &= S(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1} + \Delta p_{20}, K_{1N}, K_{2N}) - S(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}, K_{1N}, K_{2N}). \end{aligned}$$

Здесь Δp_{10} , Δp_{20} – приращения начальных значений сопряженных переменных.

После подстановки в целевую функцию этих приращений приходим к функции только одной переменной h на каждом итерационном шаге

$$\varphi(h) = S(K_{1N}(p_{10}^i, p_{20}^i), K_{2N}(p_{10}^i, p_{20}^i)) = \omega_1 (K_{1N}(p_{10}^i, p_{20}^i) - \bar{K}_1)^2 + \omega_2 (K_{2N}(p_{10}^i, p_{20}^i) - \bar{K}_2)^2.$$

Параметр h содержится неявно в зависимостях:

$$\begin{aligned} K_{1N}(p_{10}^i, p_{20}^i) &= K_{1N}\left(p_{10}^{i-1} - h \frac{\Delta_1 S(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}, K_{1N}, K_{2N})}{\Delta p_{10}}, p_{20}^{i-1} - h \frac{\Delta_2 S(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}, K_{1N}, K_{2N})}{\Delta p_{20}}\right), \\ K_{2N}(p_{10}^i, p_{20}^i) &= K_{2N}\left(p_{10}^{i-1} - h \frac{\Delta_1 S(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}, K_{1N}, K_{2N})}{\Delta p_{10}}, p_{20}^{i-1} - h \frac{\Delta_2 S(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}, K_{1N}, K_{2N})}{\Delta p_{20}}\right). \end{aligned}$$

Для получения явной функции от параметра h эти зависимости аппроксимируем явными линейными зависимостями с помощью формулы Тейлора в разностной форме:

$$K_{1N}(p_{10}^i, p_{20}^i) = K_{1N}(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}) - h \left(\frac{\Delta K_{1N}}{\Delta p_{10}} \cdot \frac{\Delta_1 S}{\Delta p_{10}} + \frac{\Delta K_{1N}}{\Delta p_{20}} \cdot \frac{\Delta_2 S}{\Delta p_{20}} \right), \quad (32)$$

$$K_{2N}(p_{10}^i, p_{20}^i) = K_{2N}(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}) - h \left(\frac{\Delta K_{2N}}{\Delta p_{10}} \cdot \frac{\Delta_1 S}{\Delta p_{10}} + \frac{\Delta K_{2N}}{\Delta p_{20}} \cdot \frac{\Delta_2 S}{\Delta p_{20}} \right). \quad (33)$$

После подстановки полученных выражений в целевой функционал (29), который аппроксимирован на дискретном множестве, приходим к функции одной переменной – параметра h , определяющего шаг итерационного процесса

$$\begin{aligned} \varphi(h) = S(p_{10}^i, p_{20}^i) = & \omega_1 \left[K_{1N}(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}) - \bar{K}_1 - h \left(\frac{\Delta K_{1N}}{\Delta p_{10}} \cdot \frac{\Delta_1 S}{\Delta p_{10}} + \frac{\Delta K_{1N}}{\Delta p_{20}} \cdot \frac{\Delta_2 S}{\Delta p_{20}} \right) \right]^2 + \\ & + \omega_2 \left[K_{2N}(p_{10}^{i-1}, p_{20}^{i-1}) - \bar{K}_2 - h \left(\frac{\Delta K_{2N}}{\Delta p_{10}} \cdot \frac{\Delta_1 S}{\Delta p_{10}} + \frac{\Delta K_{2N}}{\Delta p_{20}} \cdot \frac{\Delta_2 S}{\Delta p_{20}} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Из условия $\varphi'(h) = \frac{d\varphi}{dh} = 0$ получаем оптимальное значение h

$$h = \frac{\omega_1 (K_{1N} - \bar{K}_1) \sum_{i=1}^2 \frac{\Delta K_{1N}}{\Delta p_{i0}} \cdot \frac{\Delta_i S}{\Delta p_{i0}} + \omega_2 (K_{2N} - \bar{K}_2) \sum_{i=1}^2 \frac{\Delta K_{2N}}{\Delta p_{i0}} \cdot \frac{\Delta_i S}{\Delta p_{i0}}}{\omega_1 \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\Delta K_{1N}}{\Delta p_{i0}} \cdot \frac{\Delta_i S}{\Delta p_{i0}} \right)^2 + \omega_2 \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\Delta K_{2N}}{\Delta p_{i0}} \cdot \frac{\Delta_i S}{\Delta p_{i0}} \right)^2}. \quad (35)$$

Для подробного описания алгоритма приведем условную блок-схему, состоящую из автономных функциональных блоков (каждый из них решает определенную задачу) и связей между ними (то есть направление потока вычислительных данных). Приведем также наименование этих блоков и их назначение в вычислительном процессе. Основные программные блоки и их связи представлены на рисунке 3.

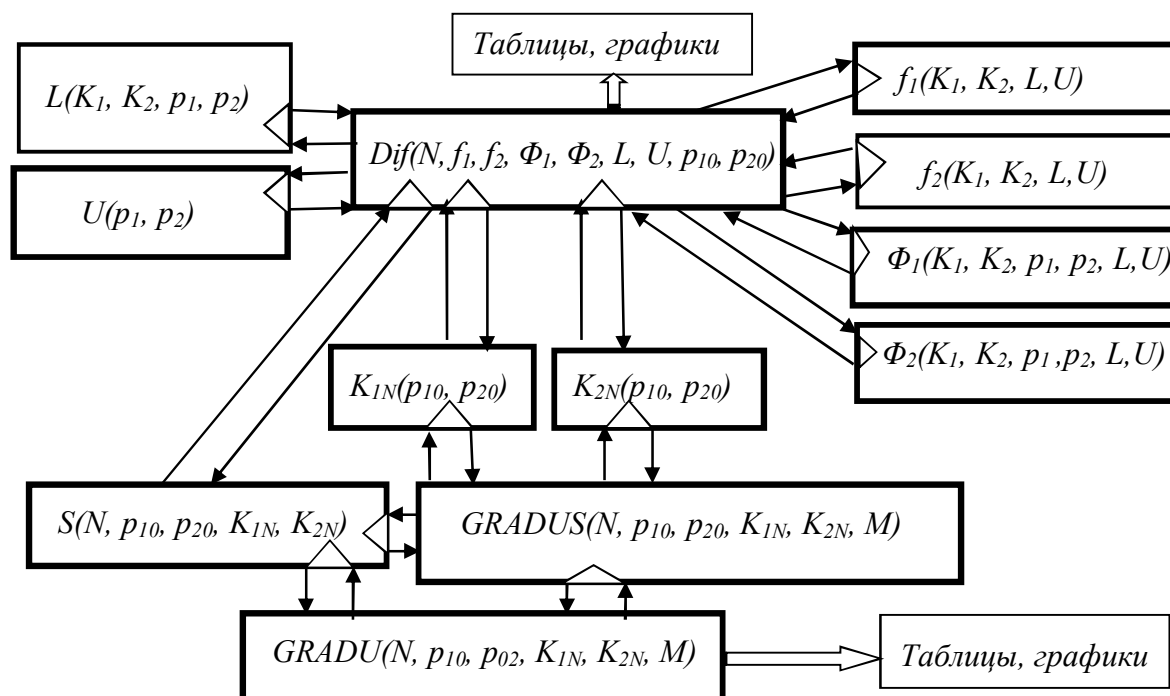


Рис. 3. Основные программные блоки и их связи

Программные блоки $f_1(K_1, K_2, L, U)$, $f_2(K_1, K_2, L, U)$, $\Phi_1(K_1, K_2, p_1, p_2, L, U)$ и $\Phi_2(K_1, K_2, p_1, p_2, L, U)$ определяют вид правых частей системы дифференциальных уравнений (24) – (27). При конкретных значениях аргументов, которые указаны в скобках, вычисляются значения функций. Оптимальные зависимости L и U от остальных параметров (22), (23) определяются блоками $L(K_1, K_2, p_1, p_2)$ и $U(p_1, p_2)$.

Функциональный блок $Dif(N, f_1, f_2, \Phi_1, \Phi_2, L, U, p_{10}, p_{20})$ служит для приближенного решения численным методом начальной задачи с уравнениями (24) – (27). С помощью этого блока определяются функции $K_{1N}(p_{10}, p_{20})$ и $K_{2N}(p_{10}, p_{20})$, то есть зависимости конечных значений K_{1N} и K_{2N} от начальных значений сопряженных переменных.

Отклонение расчетных значений K_{1N} и K_{2N} на конце временного отрезка от заданных значений вычисляется в функциональном блоке $S(N, p_{10}, p_{20}, K_{1N}, K_{2N})$. Функциональный блок $GRADUS(N, p_{10}, p_{20}, K_{1N}, K_{2N}, M)$ служит для вычисления разностного градиента функций (28), (29) в заданной точке, оптимальный шаг итерации и координаты новой точки.

Координация между приведенными функциональными блоками в итерационном процессе осуществляется с помощью программного блока $GRADU(N, p_{10}, p_{20}, K_{1N}, K_{2N}, M)$. Здесь M – число итераций, которое определяется требованием точности решения задачи. Приведенный алгоритм реализован в системе Mathcad [9, 22].

3. Вычислительный эксперимент

В качестве примера рассматривались предприятия Воронежской и Белгородской областей за трехлетний период работы [10, 12].

Производственные функции принимались в виде функций Кобба-Дугласа:

$$F_1(K_1, L_1, K_2) = A_1 K_1^{\alpha_1} L_1^{\alpha_2} K_2^{\alpha_3}, \quad F_2(K_2, L_2) = A_2 K_2^{\alpha_4} L_2^{\alpha_5}.$$

Статистические оценки параметров производственной функции первого сектора определялись с помощью метода наименьших квадратов [15, 17, 18, 19, 22, 23].

Получены следующие значения статистических оценок параметров:

$$A_1 = 1,34, \quad \alpha_1 = 0,209, \quad \alpha_2 = 0,361, \quad \alpha_3 = 0,409.$$

Интервальные оценки этих параметров составили: $0,66 < A_1 < 2,74$; $0,13 < \alpha_1 < 0,29$; $0,11 < \alpha_2 < 0,612$; $0,18 < \alpha_3 < 0,63$ при надежности $\gamma = 0,9$.

При оптимизации следует учитывать диапазоны изменения основных параметров предприятий, данные которых использованы для получения статистических оценок. Приведем эти данные, следуя [10, 12].

Основные ресурсы принимали значения: $L = 54 - 242$ (чел.), $K = 1,6 - 85$ млн руб.; площадь сельскохозяйственных угодий $2800 - 13\,800$ га; стоимость валовой продукции $26 - 210$ млн руб.

Необходимо подчеркнуть, что в вычислительном эксперименте основные параметры производственной функции второго сектора принимались в достаточно широком диапазоне с использованием данных работы [12]. Для постановки корректных задач оптимального управления, в силу ограниченности ресурсов предприятия, проводился оценочный расчет возможности динамики роста основных фондов предприятия. Результаты оценочных расчетов динамики роста основных фондов секторов приведены на рисунке 4.

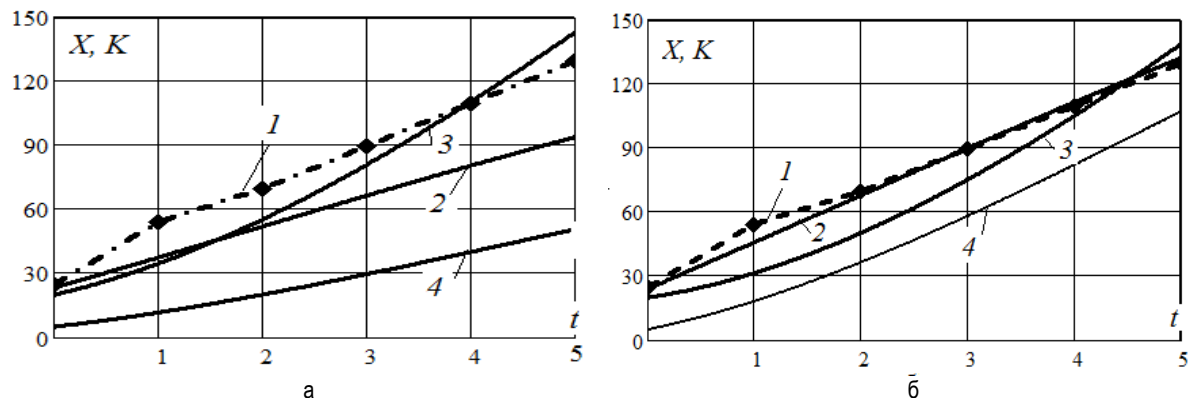


Рис. 4. Результаты первого этапа оптимизации: 1 – $X_1^*(t_i)$; 2 – $X_1(t)$; 3 – $K_1(t)$; 4 – $K_2(t)$;

а – рост параметров при начальном распределении ресурсов; б – результат итерационного процесса.

Исходные данные: $L(0) = L_0 = 100$ (чел.); $K_1(0) = K_{10} = 20$ (усл. ед.); $K_2(0) = K_{20} = 5$ (усл. ед.)

Рассмотрим решение задачи 2. Исходные данные для расчетов, с целью сравнения результатов, приняты такими же, как и в работе [10]: $\alpha_1 = 0,21$; $\alpha_2 = 0,36$; $\alpha_3 = 0,41$; $\alpha_4 = 0,3$; $\alpha_5 = 0,7$; $A_1 = 1,34$; $A_2 = 1,34$; $K_1(T) = 150$; $K_2(T) = 50$; $T = 5$.

На рисунке 5 представлены значения целевой функции в итерационном процессе при простом и ускоренном методах градиентного спуска, а также оптимальное решение задачи 2.

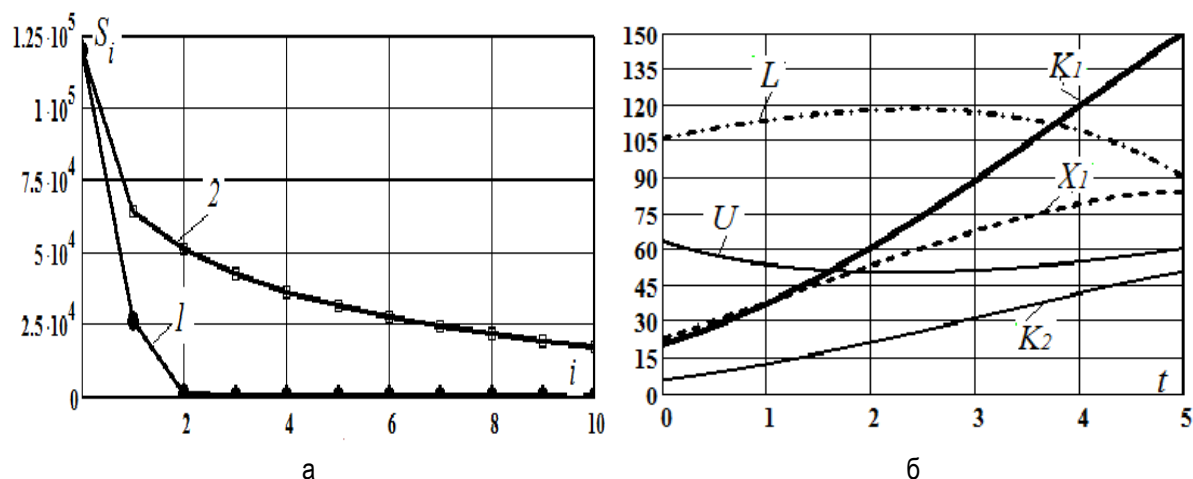


Рис. 5. а – зависимость функции S от числа итераций: 1 – метод ускоренного спуска; 2 – простой метод спуска; б – оптимальное решение задачи 2

Результаты решения задачи 1 представлены на рисунке 6. Графики на рисунках 4 и 5 демонстрируют принципиальные достоинства метода ускоренного градиентного спуска (существенное уменьшение числа итераций при автоматическом выборе шага) и достижимость конечных значений переменных при оптимальном управлении.

При реализации предложенного алгоритма на практике неизбежно возникают определенные трудности. Это связано со сложностью обеспечения непрерывного изменения таких величин, как инвестиции и трудовые ресурсы. Полученные результаты можно рассматривать как оценочные на пути перехода к аналогичным задачам дискретного управления. При некотором рациональном выборе временного шага такой алгоритм можно рассматривать как дискретное управление, и тогда его реализация для решения практических задач подобного типа становится возможной.

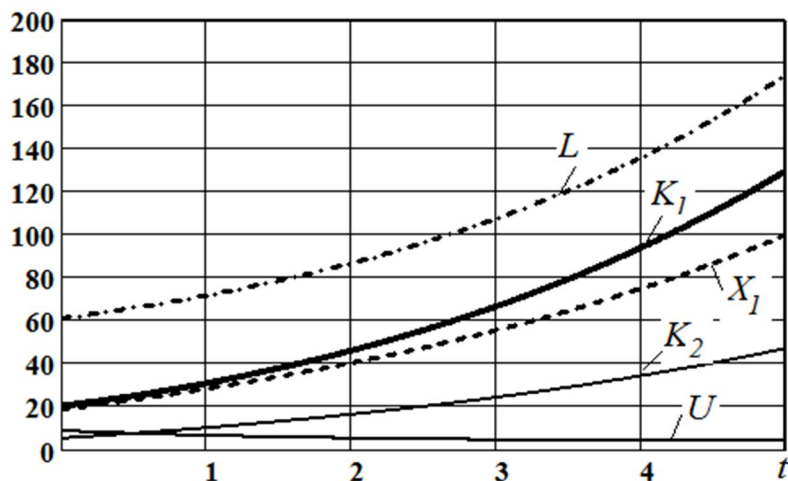


Рис. 6. Оптимальное решение задачи 1 ($X_1(T) = 100$)

Проведем анализ выполнения достаточных условий максимума функции Гамильтона с учетом конкретного вида производственных функций. При каждом фиксированном t это функция двух переменных U и L

$$H(L,U) = -L^2 - U^2 + p_1 \left(\frac{\delta}{1+\delta} \left(\sigma A_1 K_1^{\alpha_1} \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{\alpha_2} L^{\alpha_2} K_2^{\alpha_3} \right) + \gamma_1 U - \mu_1 K_1 \right) + p_2 \left(\frac{1}{1+\delta} \left(\sigma A_1 K_1^{\alpha_1} \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{\alpha_2} L^{\alpha_2} K_2^{\alpha_3} \right) + \gamma_2 U - \mu_2 K_2 \right). \quad (36)$$

Частные производные первого и второго порядков, а также стационарные зависимости управляющих параметров от остальных переменных имеют вид:

$$\frac{\partial H}{\partial U} = -2U + p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2, \quad U(t) = 0,5(\gamma_1 p_1(t) + \gamma_2 p_2(t)), \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial U^2} = -2, \quad \frac{\partial H}{\partial L} = -2L + \frac{\sigma}{1+\delta} (p_1 \delta + p_2) \left(A_1 K_1^{\alpha_1} \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{\alpha_2} \alpha_2 L^{\alpha_2-1} K_2^{\alpha_3} \right), \quad (38)$$

$$L(t) = \left[\frac{1}{2} A_1 \frac{\sigma}{1+\delta} K_1(t)^{\alpha_1} \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{\alpha_2} \alpha_2 K_2(t)^{\alpha_3} (\delta p_1(t) + p_2(t)) \right]^{\frac{1}{2-\alpha_2}}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial L^2} = -2 + \frac{\sigma}{1+\delta} (p_1 \delta + p_2) \left(A_1 K_1^{\alpha_1} \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{\alpha_2} \alpha_2 (\alpha_2 - 1) L^{\alpha_2-2} K_2^{\alpha_3} \right), \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial L \partial U} = 0. \quad (41)$$

При условиях $p_1 \delta + p_2 > 0$ и $\alpha_2 < 1$ получаем $\frac{\partial^2 H}{\partial L^2} < 0$ и с учетом $\frac{\partial^2 H}{\partial U^2} = -2$, $\frac{\partial^2 H}{\partial L \partial U} = 0$ приходим к достаточному условию максимума функции Гамильтона

$$\Delta = \frac{\partial^2 H}{\partial L^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial U^2} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial L \partial U} \right)^2 > 0. \quad (42)$$

С помощью разработанной программы численно получены частные зависимости функции Гамильтона $H(L,U)$ от L и U , соответственно при фиксированных значениях U и L в заданные моменты времени. Эти зависимости представлены на рисунке 7.

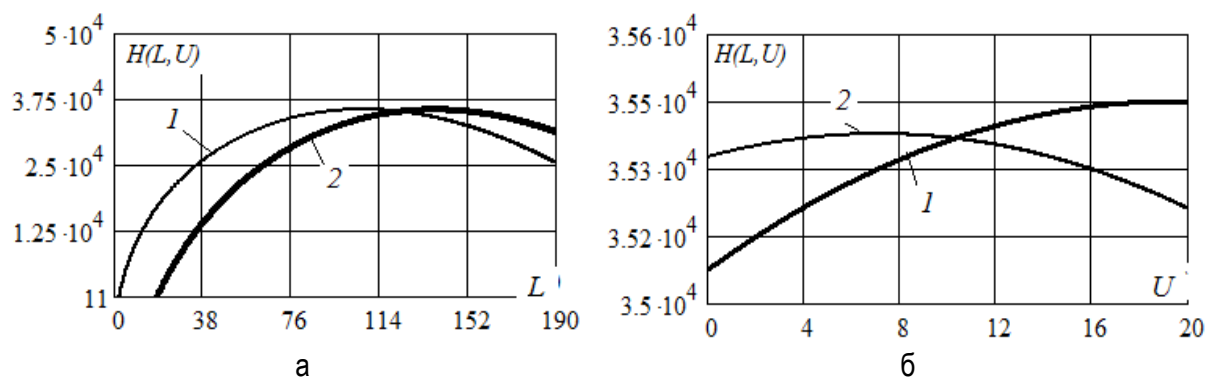


Рис. 7. Зависимость функции Гамильтона от управляющих переменных в фиксированные моменты времени: $t_1 = 10\tau$; $t_2 = 1000\tau$ (τ – шаг интегрирования);
а: 1 – $U(t_1)$; 2 – $U(t_2)$; б: 1 – $L(t_1)$; 2 – $L(t_2)$

Приведенные на рисунке 7 зависимости подтверждают наличие максимума функции Гамильтона.

Заключение

Результаты проведенных исследований служат основой для реализации следующих итерационных алгоритмов, состоящих из двух этапов оптимизации экономики предприятия сельскохозяйственного типа, при условии использования секторных моделей экономики.

1. При использовании данных функционирования подобных, однородных предприятий за короткий период работы, для оценки основных параметров производственных функций (например, типа функций Кобба-Дугласа) необходимо рационально подбирать размерности переменных, то есть использовать индексные переменные. Эти размерности должны обеспечивать соизмеримые значения переменных. Такой выбор позволяет обеспечить экономичность и устойчивость применяемых численных методов.

2. Определяются границы (верхняя и нижняя) динамики возможного роста основных фондов секторов и объемов выпуска продукции, которые обеспечиваются ограниченными ресурсами предприятия. Полученные границы позволяют формулировать корректные задачи оптимального управления, то есть достижение заданных значений переменных в течение заданного промежутка времени. На этом этапе целесообразно провести оптимизацию по распределению ресурсов между секторами для обеспечения заданной траектории роста основных переменных (основных фондов или объема продукции).

3. Формулируются задачи оптимального управления изменением трудовых ресурсов и внешних инвестиций. Выбирается вид интегрального функционала, который характеризует затраты на обеспечение трудовых ресурсов и внедрение внешних инвестиций. Задачи на условный экстремум функционала формулируются в форме Гамильтона-Якоби (каноническая форма уравнений Эйлера). Для приближенного решения полученной системы дифференциальных уравнений при заданных краевых условиях применяется численный метод, который реализуется в автономном функциональном блоке системы Mathcad.

4. Поиск приближенного решения краевых задач осуществляется с помощью специального целевого функционала, приближенное минимальное значение которого можно найти одним из методов покоординатного спуска. Применение метода ускоренного градиентного спуска позволяет существенно уменьшить число итераций и практически исключить необходимость экспериментального подбора шага итерационного процесса, то есть повысить эффективность и экономичность расчетов.

5. Реализация предложенного алгоритма осуществляется в системе Mathcad. Программа в виде автономных функциональных блоков позволяет с минимальной корректировкой переходить к решению задач оптимизации подобного типа, изменяя параметры целевых функций, правые части дифференциальных уравнений, вид интегральных функционалов.

Библиографический список

1. Буценко Е.В. Оптимизация управления инвестиционным проектированием на основе теоретико-игрового подхода / Е.В. Буценко // Экономика региона. – 2018. – Т. 14, № 1. – С. 270–280.
2. Васильев Е.П. Агрегированная производственная функция / Е.П. Васильев // Дайджест-Финансы. – 2006. – № 6 (138). – С. 26–31.
3. Горбунов В.К. Эффективные производственные фонды и производственные функции малого предпринимательства регионов / В.К. Горбунов, А.Г. Львов // Экономика региона. – 2018. – Т. 14, № 2. – С. 502–515.
4. Горидько Н.И. Регрессионное моделирование и прогнозирование экономического роста на примере Архангельской области / Н.И. Горидько, Р.М. Нижегородцев // Экономика региона. – 2012. – № 4. – С. 122–130.
5. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики : учебник для вузов / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – Москва : Наука, 1970. – 664 с.
6. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – Москва : Финансы и статистика, 1986. – 240 с.

7. Колемаев В.А. Математическая экономика : учебник для вузов / В.А. Колемаев. – 3-е изд., стер. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 399 с.
8. Математическая экономика на персональном компьютере / М. Кубонива, М. Табата, С. Табата, Ю. Хасэбэ ; под ред. М. Кубонива ; пер. с японского Д.М. Демченко, И.В. Белова ; под ред. и с предисл. Е.З. Демиденко. – Москва : Финансы и статистика, 1991. – 303 с.
9. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad : учеб. пособие / В.А. Охорзин. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 352 с.
10. Слиденко А.М. Оптимальное управление экономикой предприятия с помощью двухсекторной модели / А.М. Слиденко, Е.А. Агапова // Управление экономическими системами. Электронный научный журнал. – 2017. – № 7. – С. 26 (1–16).
11. Слиденко А.М. Сравнение итерационных методов в задачах поиска оптимального управления экономикой / А.М. Слиденко, Е.А. Агапова // Вестник Воронежского государственного аграрного университета. – 2018. – Т. 11, № 3 (58). – С. 219–229.
12. Терновых К.С. Сравнительный анализ показателей эффективности деятельности сельскохозяйственных предприятий на основе модели двухсекторной экономики / К.С. Терновых, А.М. Слиденко, Д.В. Чернов // Вестник Воронежского государственного аграрного университета. – 2010. – № 3 (26). – С. 79–84.
13. Токарев В.В. Методы оптимальных решений : учеб. пособие / В.В. Токарев. – 2-е изд., испр. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 420 с.
14. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – Москва : Наука, 1969. – 424 с.
15. Arrow K.J. Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency / K.J. Arrow, H.B. Chenery, B.S. Minhas, R.M. Solow // Review of Economics and Statistics. – 1961. – Vol. 43, No. 3. – Pp. 225–250. DOI: 10.2307/1927286.
16. Cobb C.W. A theory of production / C.W. Cobb, P.H. Douglas // American Economic Review. – 1928. – Iss. 18 (1). Supplement. – Pp. 139–165.
17. De la Fuente A. Mathematical Methods and Models for Economists. The Mathematical Textbook for Economists / A. de la Fuente. – Cambridge, UK, NY : Cambridge University Press, 2009. – 836 p.
18. Doms Mark E. Estimating Capital Efficiency Schedules within Production Functions / Mark E. Doms // Economic Inquiry, 1996. – Vol. 34 (1). – Pp. 78–92.
19. Felipe J. The Aggregate Production Function and the Measurement of Technical Change: 'Not Even Wrong' / J. Felipe, J.S.L. McCombie. – Cheltenham, UK : Edward Elgar Publishing Ltd., 2015. – 400 p.
20. Just Richard E. Mathematical Modeling in Agricultural Economics. Encyclopedia of Life Support Systems, Vol. 2 / Richard E. Just. – USA : University of Maryland, 2009. – Pp. 1–45.
21. Kotulič R. The application of the Cobb-Douglas production function in analyzing the effectiveness of productive resources in agricultural enterprises of primary production / R. Kotulič, J. Pavelkova // Journal of Central European Agriculture. – 2014. – Vol. 15 (3). – Pp. 284–301. DOI: 10.5513/JCEA01/15.3.1489.
22. Maxfield B. Essential Mathcad for Engineering, Science, and Math / B. Maxfield. – 2nd edition. – New York : Academic Press, 2009. – 528 p.
23. Morris C.C. Fundamentals of Calculus / Carla C. Morris, Robert M. Stark. – New Jersey, UK : Wiley & Sons, 2015. – 496 p.
24. Leonard D. Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics / D. Leonard, N. Van Long. – Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2012. – 368 p.
25. Solow R.M. Technical Change and the Aggregate Production Function / R.M. Solow // Review of Economics and Statistics. – 1957. – Vol. 39, No. 3. – Pp. 312–320. DOI: 10.2307/1926047.
26. Vali S. Principles of Mathematical Economics (Series: Mathematics Textbooks for Science and Engineering. Book 3) / S. Vali. – USA, New York : Atlantis Press, 2014. – 491 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ Принадлежность к организации

Александр Михайлович Слиденко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономического анализа, статистики и прикладной математики ФГБОУ ВО «Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I», Россия, г. Воронеж, e-mail: alexandr.slidenko@yandex.ru.

Елена Анатольевна Агапова – кандидат экономических наук, доцент кафедры высшей математики и механики ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения», Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: elenagapova603@mail.ru.

Дата поступления в редакцию 20.08.2019

Дата принятия к печати 26.09.2019

AUTHOR CREDENTIALS Affiliations

Alexandr M. Slidenko, Candidate of Physics-Math. Sciences, Docent, the Dept. of Economic Analysis, Statistics and Applied Mathematics, Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter the Great, Russia, Voronezh, e-mail: alexandr.slidenko@yandex.ru.

Elena A. Agapova, Candidate of Economic Sciences, Docent, the Dept. of Higher Mathematics and Mechanics, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Russia, St. Petersburg, e-mail: elenagapova603@mail.ru.

Received August 20, 2019

Accepted September 26, 2019